

Министерство сельского хозяйства РФ

ФГОУ ВПО «Брянская ГСХА»

Л.М. Маркарянц, Н.М. Прыгов, Д.В. Кирдищев

# **Практикум по теоретическим основам электротехники**

## **Часть 1**

### **Методическое пособие**

к решению задач по теоретическим основам электротехники  
и по выполнению самостоятельной работы студентов специальности  
«Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»

Брянск 2011

УДК 621.3 (076.5)

ББК 31.3

М 26

Маркарянц Л.М. Практикум по теоретическим основам электротехники. Методическое пособие к решению задач по теоретическим основам электротехники и выполнению самостоятельной работы студентов специальности «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» / Л.М. Маркарянц, Н.М. Прыгов, Д.В. Кирдищев.- Брянск: БГСХА, 2011 г.-111 с.

Рассмотрены примеры решения задач по теоретическим основам электротехники. Приведен набор задач для самостоятельной работы студентов при изучении лекционного материала.

*Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета энергетики и природопользования Брянской государственной сельскохозяйственной академии, протокол №1 от 11.01.2011 года.*

© ФГОУ ВПО «Брянская ГСХА», 2011  
© Маркарянц Л.М., 2011  
© Прыгов Н.М., 2011  
© Кирдищев Д.В., 2011

## Предисловие

Предлагаемый практикум по курсу «Электротехника и электроника» соответствует программе и включает минимальный набор задач по расчету электрических цепей постоянного, переменного, однофазного и трёхфазного тока.

Для успешного освоения учебного материала и облегчения решения задач в начале каждой главы приведены основные формулы и уравнения.

В практикуме имеется значительное количество вопросов и задач, которые можно использовать для самостоятельной работы студентов при изучении теоретического материала не только с целью контроля полученных знаний, но и при выполнении письменных домашних заданий, контрольных работ, проведения олимпиад, зачетов и экзаменов.

Подбор вопросов и задач соответствует расположению материала в темах программы.

Половина предложенных задач в практикуме приведена с подробными решениями, а другую половину задач студенты должны решить самостоятельно для формирования навыков решения задач.

Во всех задачах, где не указана частота переменного тока она принята равной 50Гц.

## Глава 1. Электрическое поле

### 1.1. Основные определения, формулы и уравнения.

#### 1.1.1. Напряженность электрического поля.

##### Закон Кулона

Согласно представлениям современной физики электрическое поле реально существует и является одной из форм существования материи. Посредством электрического поля осуществляются определенные взаимодействия между микроскопическими телами или частицами, которые входят в состав вещества. В этом случае говорят об электрическом поле, т.е. о поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды.

Физическая величина, характеризующая интенсивность электромагнитных взаимодействий, называется *электрическим зарядом*.

Для обнаружения и исследования электрического поля используется пробный точечный положительный заряд  $q_0$ , который не искажает исследуемое поле, т.е. не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле.

Если в электрическом поле, создаваемом зарядом  $q$ , поместить пробный заряд  $q_0$ , то на него будет действовать сила  $F$  различная в разных точках поля и которая пропорциональна пробному заряду  $q_0$ . Отношение  $\frac{F}{q_0}$  не зависит от пробного заряда  $q_0$  и характеризует электрическое поле в данной точке, где находится пробный заряд. Эта величина называется *напряженностью* электрического поля и является *его силовой характеристикой*.

*Напряженность электрического поля* – физическая векторная величина  $E$ , равная соотношению силы  $F$ , действующей на пробный заряд  $q_0$ , к этому заряду, т.е.

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (1)$$

Единицей измерения напряженности электрического поля  $E$  в СИ является Н/Кл или В/м

*Напряженность электрического поля для пробного заряда  $q$ :*

$$E = \frac{q}{4\pi R^2 \varepsilon_a}, \quad (2)$$

где  $R$  – расстояние между зарядом  $q$  и точкой, в которой определяется напряженность поля, м;

$\varepsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, характеризующая диэлектрические свойства диэлектрика,  $\frac{\Phi}{m}$

$$\mathcal{E}_a = \varepsilon_0 \mathcal{E}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}, \frac{\Phi}{\text{м}}$

$\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды,  $\frac{\Phi}{\text{м}}$

**Напряженность в любой точке поля, создаваемая несколькими зарядами**, определяется геометрической суммой напряженностей полей (суперпозиция полей)

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n, \quad (4)$$

где  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  - напряженности электрического поля, создаваемое каждым зарядом и определяемы по формуле (2).

**Сила взаимодействия двух пробных зарядов  $q_1$  и  $q_2$**  определяется по формуле Кулона (1785 г.)

$$F_k = K \frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon R^2}, \quad (5)$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности, равный

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_0$  - электрическая постоянная,  $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

**Напряженность электрического поля точечного заряда  $q_0$**  определяется зависимостью:

$$E = \frac{F_k}{|q|} = \frac{K|q_0||q|}{\varepsilon R^2|q|} = K \frac{|q_0|}{\varepsilon R^2} \quad (7)$$

Для замкнутой системы, т.е. в которую не входят извне и из которой не выходят заряженные частицы, можно сформулировать **закон сохранения электрического заряда**.

**В замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается постоянной, т.е.**

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \text{const} \quad (8)$$

**Любой заряд, независимо от знака, всегда кратен минимальному элементарному заряду  $e$ , т.е.**

$$q = ne, \quad (9)$$

где  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл  
 $n = +1, +2, \dots; -1, -2, \dots$

В этом проявляется **свойство дискретности электрического заряда.**

За единицу заряда принят кулон (Кл). **Кулон** – это заряд, проходящий за 1с. через поперечное сечение проводника при силе тока 1А.

### 1.1.2. Электрическое напряжение и потенциал

В механике взаимное действие тел друг на друга **характеризуют силой или потенциальной энергией.**

Электростатическое поле, осуществляющее взаимодействие между зарядами, также **характеризуют двумя величинами напряженностью и потенциалом электрического поля.** Напряженность является **силовой характеристикой**, а потенциал – **энергетической** характеристикой электрического поля.

Электрическое поле в каждой точке обладает потенциальной энергией и способно совершать работу. Эта способность определяется потенциальной энергией, т.е. потенциалом  $\varphi$ , который является **скалярной величиной.**

**За меру** потенциала в данной точке электрического поля принимается работа, совершаемая электрическим полем при переносе единичного заряда из этой точки в бесконечность, т.е. за пределы поля ( $\varphi_b = 0$ ).

$$\varphi_a = \frac{A_a}{q_0} = \int_a^b E dl \quad (10)$$

В реальных задачах обычно принимают потенциал поверхности Земли за нуль.

Потенциал в любой точке поля, удаленной от сосредоточенного заряда  $q$ , определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R}, \quad (11)$$

где  $R$  – расстояние от заряда до данной точки;

$\epsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\frac{\Phi}{м}$ ;

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}, \text{Ф/м}$ ;  
 $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды,  $\text{Ф/м}$

При переносе точечного заряда  $q_0$  силами электрического поля из точки «а» в точку «b» совершается работа

$$A = A_a - A_b = \varphi_a q_0 - \varphi_b q_0 = q_0 (\varphi_a - \varphi_b) \quad (13)$$

Отсюда видно, что работа пропорциональна разности потенциалов.

**Разность потенциалов двух точек электрического поля называется электрическим напряжением.**

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_0^b E d\ell \quad (14)$$

**Таким образом, электрическое напряжение  $U_{ab}$  равно работе, затраченной на перемещение единичного заряда из одной точки электрического поля в другую.**

**Напряжение** – скалярная величина и зависит от положения точек, между которыми оно определяется и не зависит от пути, по которому перемещается заряд

$$U_{ab} = E \frac{A_{ab}}{q_0} = \frac{Eq_0 d}{q_0} = Ed, \quad (15)$$

где  $d$  – расстояние между зарядами в электрическом поле, м:

$E$  - напряженность электрического поля,  $\text{В/м}$

### 1.1.3. Электрическая емкость конденсатора

**Обычный конденсатор** – это устройство из двух изолированных проводников, которые называются пластинами или обкладками. Расстояние между пластинами много меньше их собственных размеров, и они несут на себе равные по модулю электрические заряды противоположных знаков. В этом случае модуль заряда  $Q$  каждой из пластин называют **зарядом конденсатора**. При этом суммарный заряд пластин конденсатора равен нулю.

Напряженность электрического поля вблизи каждой из пластины равна

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (16)$$

где  $\delta$  - плотность заряда на пластине конденсатора

$$\delta = \frac{q}{S}, \quad (17)$$

где  $S$  – площадь каждой пластины.

Электрическое поле пластин разного знака снаружи конденсатора компенсируют друг друга, т.е. между пластинами создают напряженность, которая равна:

$$E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}, \quad (18)$$

Разность потенциалов между пластинами (напряжение между обкладками) в однородном поле равна

$$U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}, \quad (19)$$

где  $d$  – расстояние между обкладками конденсатора.

Величина, равная отношению заряда конденсатора к разности потенциалов, называется *электрической емкостью* конденсатора.

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \quad (20)$$

Электрическая емкость определяется только геометрией пластин, расстоянием между ними и средой между пластинами.

Понятие *конденсатор* происходит от латинского корня, означающего «сгущать» или «накапливать». Это свойство конденсатора используется в работе фотовспышки, импульсного лазера и др. Конденсатор сначала накапливает энергию разделенных зарядов, а затем её высвобождает за короткое время вспышки (0,001с.) электролампы.

Заряды, расположенные на пластинах конденсатора, обладают потенциальной энергией, которую называют энергией конденсатора:

$$W = C \frac{U^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}, \quad (21)$$

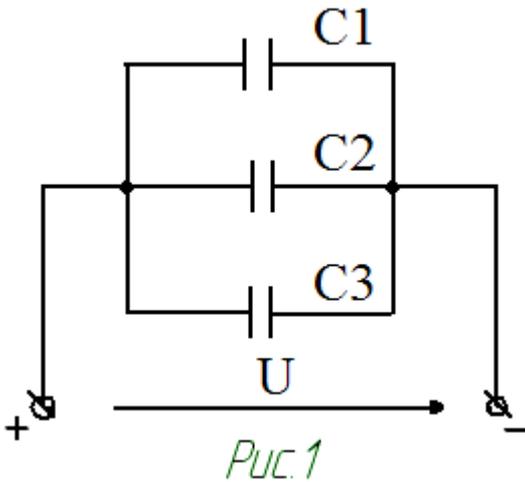
Физическую величину, равную отношению энергии электрического поля конденсатора ( $W$ ) к объему пространства между пластинами ( $V = Sd$ ), называют **плотностью электрического поля**

$$\delta = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (22)$$

Плотность энергии электрического поля не зависит от параметров конденсаторов, а определяется только напряженностью электрического поля.

Конденсаторы в электрической цепи, соединенные проводниками, образуют **батарею конденсаторов**, которые могут быть соединены последовательно, параллельно и смешанно.

При **параллельном** соединении конденсаторов емкость батареи конденсаторов  $C_{\text{бат}}$  равна (рис.1)



$$C_{\text{бат}} = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{U}, \quad (23)$$

$$\text{где } C_1 = \frac{q_1}{U}; \quad C_2 = \frac{q_2}{U}; \quad C_3 = \frac{q_3}{U};$$

При **последовательном** соединении конденсаторов емкость батареи конденсаторов  $C_{\text{бат}}$  равна (рис. 2).

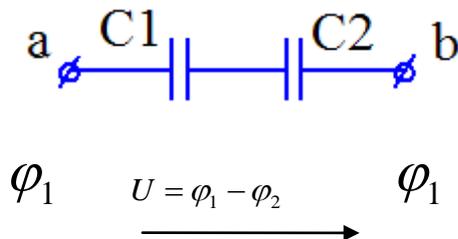


Рис. 2

$$C_{\text{бам}} = \frac{q}{U} = \frac{q}{U_1 + U_2} = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2};$$

или  $\frac{1}{C_{\text{бам}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n};$  (24)

Если участки батареи представляют собой несколько конденсаторов, которые соединены параллельно или последовательно, то каждый участок заменяют одним конденсатором, чья емкость эквивалентна емкости соответствующего участка батареи, т.е. происходит постепенное упрощение структуры батареи конденсаторов (рис. 3 и рис. 4).

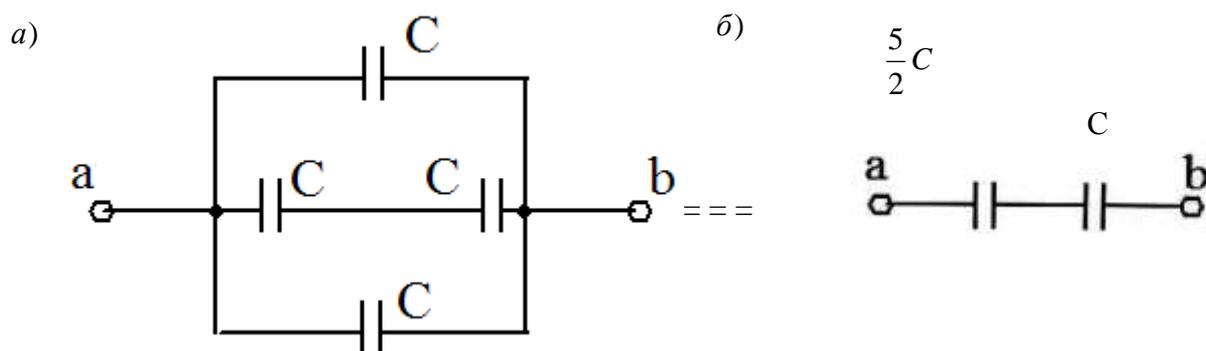


Рис. 3

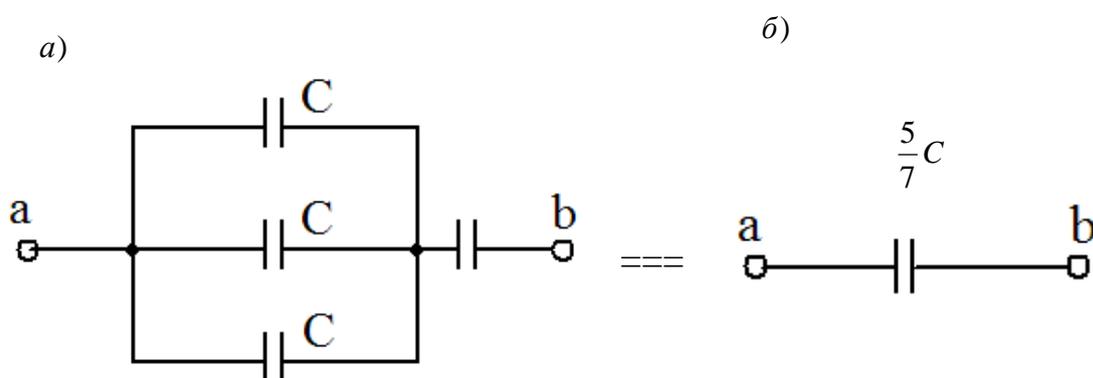


Рис. 4

## 1.2. Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** У поверхности Земли напряженность электрического поля  $E_1 = 120 \text{ В/м}$ , на высоте  $h = 1,5 \text{ км}$   $E_2 = 25 \text{ В/м}$

Определить электрический заряд в атмосфере от поверхности Земли до высоты  $h$ . Плотность зарядов в атмосфере считать постоянной. Вектор напряженности электрического поля направлен к Земле.

**Решение:**

Обозначим заряд Земли  $Q_1$ , заряд слоя атмосферы от поверхности Земли до высоты  $h = 1,5 \text{ км}$  обозначим  $Q_2$ . Радиус Земли  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$

$$\text{Учитывая, что } E_1 = k \frac{q_1}{R^2}; \text{ и } E_2 = K \frac{q_1 + q_2}{(R+h)^2} \cong k \frac{q_1 + q_2}{R^2},$$

получим значение зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$

$$|q_1| = \frac{E_1 R^2}{k} = \frac{120 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{9 \cdot 10^9} = 5,5 \cdot 10^5 \text{ Кл}$$

$$q_1 = -5,5 \cdot 10^5 \text{ Кл}$$

$$q_2 = \frac{E_2 R^2}{k} - q_1 = \frac{25 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{9 \cdot 10^9} - 5,5 \cdot 10^5 = 4,4 \cdot 10^5 \text{ Кл},$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности,  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$

Ответ:  $q_2 = 4,4 \cdot 10^5 \text{ Кл}$

**Задача 2.** Три одинаковых одноименных заряда  $q$  расположены в вершинах равностороннего треугольника (рис.5). Какой заряд  $Q$  нужно поместить в центр треугольника, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

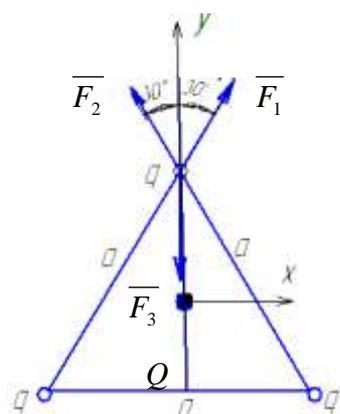


Рис. 5

Чтобы система зарядов была в равновесии

заряды  $q$  и  $Q$  должны быть разноименными..

Для равновесия системы зарядов необходимо

Соблюдать условие:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$

Согласно закону Кулона имеем

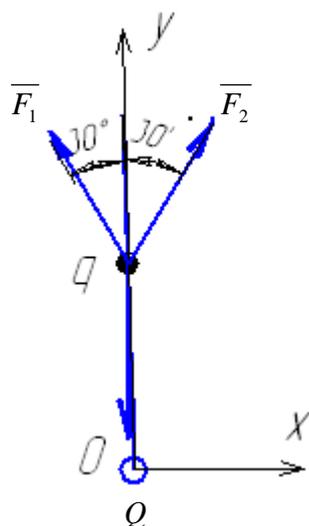
$$|F_1| = |F_2| = k \frac{q^2}{a^2};$$

$$F_3 = 3k \frac{qQ}{a^2};$$

Проектируя силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  на вертикальную ось  $Oy$  (рис.5;рис.6), получим

$$F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ = -F_3$$

$$k \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + k \frac{q^2}{a^2} = -3k \frac{qQ}{a^2};$$



$$2k \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3k \frac{qQ}{a^2};$$

$$Q = -\frac{k\sqrt{3}q^2 a^2}{a^2 3kq} = -\frac{q}{\sqrt{3}};$$

$$\text{Ответ: } Q = -\frac{q}{\sqrt{3}} \text{ Кл}$$

Рис. 6

**Задача 3.** Два электрона, находящиеся в начальный момент далеко друг от друга, движутся навстречу вдоль прямой с одинаковой по модулю скоростью  $v_0 = 1000 \text{ Км/с}$ , направленной вдоль соединяющей электроны прямой. На какое наименьшее расстояние они сблизятся.

### Решение:

Минимальное расстояние достигается в момент остановки электронов, когда вся их начальная кинетическая энергия:  $W_k = 2 \frac{mv_0^2}{2}$

$$\text{Переходит в потенциальную энергию: } W_n = k \frac{e^2}{R_{\min}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_{\min}};$$

Приравнявая  $W_k = W_n$  и, решая относительно  $R_{\min}$ , имеем:

$$\frac{2 \cdot mv_0^2}{2} = \frac{ke^2}{R_{\min}},$$

$$\tau_{\min} = \frac{ke^2}{mv_0^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 v_0^2 m} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1000^2 \cdot 0,92 \cdot 10^{-20}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

где  $e$  - заряд электрона,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ;

$m$  - масса электрона,  $m = 0,92 \cdot 10^{-20} \text{ кг}$ ;

$\epsilon_0$  - электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

$k$  - коэффициент пропорциональности,

$$k = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2};$$

Ответ:  $R_{\min} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

**Задача 4.** Три металлические пластины площадью  $S$ , каждая расположена параллельно на расстояниях  $d$  друг от друга (рис.7). На первой пластине имеется электрический заряд  $q_1$ , между первоначально заряженными второй и третьей пластинами включена батарея с ЭДС  $E$ .

Определить заряды  $q_2$  и  $q_3$  на пластинах 2 и 3.

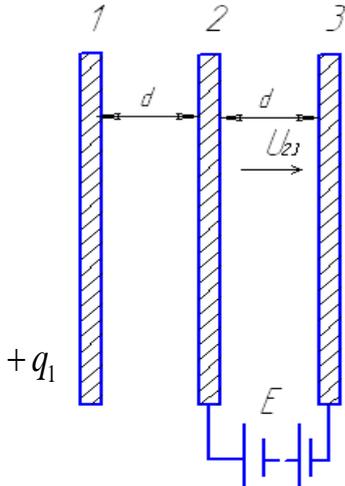


Рис. 7

**Решение:**

1. Заряды  $q_2$  и  $q_3$  по закону сохранения электрического заряда в сумме равны нулю, т.е.  $q_2 + q_3 = 0$ .  $q_2 = -q_3 = q$ .
2. Напряжение между пластинами 2 и 3 равно ЭДС батареи, т.е.  $U_{23} = E$ .
3. Так как векторы напряженностей электрических полей  $\vec{E}$ , создаваемые зарядами  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , имеют между пластинами 2 и 3 одинаковое направление,

то:

$$U_{23} = (E_1 + E_2 + E_3)d = \left( \frac{q_1}{2S\epsilon_0} + \frac{q}{2S\epsilon_0} + \frac{q}{2S\epsilon_0} \right) d = \frac{q_1 \cdot d}{2S\epsilon_0} + \frac{qd}{S\epsilon_0} E$$

4. Заряды на пластинах 2 и 3 будут равны:

$$q = \frac{S\epsilon_0}{d} E - \frac{q_1}{2}$$

Ответ:  $q_2 = q_3 = E \frac{S\epsilon_0}{d} - \frac{q_1}{2}$

**Задача 5.** Каков заряд пылинки массой  $1,5 \cdot 10^{-8}$  г, помещенный между двумя пластинками, напряжение на которых 500В, а расстояние между ними 0,5 см. (рис. 8).

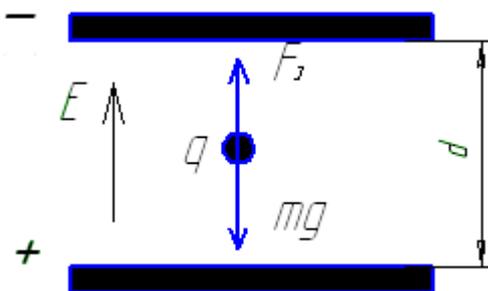


Рис. 8

**Решение:**

1. На пылинку действуют сила тяжести  $mg$  и сила со стороны электрического поля  $F_e = qE$
2. Так как тела находятся в равновесии, то  $mg = F_e = qE$

3. Электрическое поле однородное, потому  $E = \frac{U}{d}$ , т.е.  $F_e = \frac{qU}{d}$

4. Отсюда заряд пылинки будет равен:

$$q = \frac{F_e d}{U} = \frac{mg \cdot d}{U} = \frac{1,5 \cdot 10^{-8} \cdot 9,8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^2} = 1,47 \cdot 10^{-15} \text{ Кл}$$

Ответ;  $q = 1,47 \cdot 10^{-15} \text{ Кл}$

### 1.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Два одинаковых проводящих шарика с зарядами  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$  и  $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$  вследствие притяжения соприкоснулись и вновь разошлись на 5 см.

Найти заряд каждого шарика после соприкосновения и силу электрического взаимодействия между ними.

Ответ:  $q_1' = q_2' = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$   
 $F = 90 \text{ Н}$

**Задача 2.** Три конденсатора, соединенные по схеме (рис. 9), имеют емкость  $C_1 = 1,5 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$  и  $C_3 = 4 \text{ мкФ}$ . К ним подведено напряжение  $U = 250 \text{ В}$ .

Найти заряд и энергию батареи, а также заряд и напряжение на первом конденсаторе.

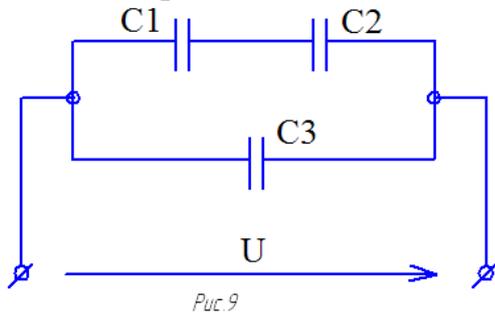


Рис 9

Ответ;  $q = 1,54 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$ ;  $q_1 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$ ;  
 $W = 0,16 \text{ Дж}$ ;  $U_1 = 166,7 \text{ В}$

**Задача 3.** Найти разность потенциалов  $U$  между точками А и В (рис. 10), если  $U_0 = 80 \text{ В}$ . Емкость конденсаторов  $C_1 = 1 \text{ мкФ}$ ;  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$ .

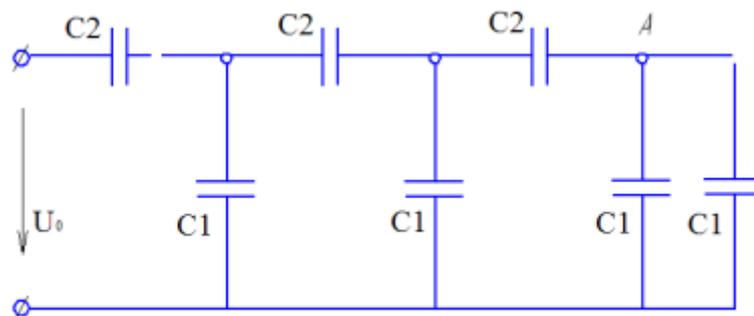


Рис 10

Ответ:  $U = 10 \text{ В}$

**Задача 4.** Два электрона, находящиеся в начальный момент далеко друг от друга, движутся навстречу вдоль одной прямой с одинаковыми по модулю скоростями  $v_0 = 1000 \frac{\text{КМ}}{\text{с}}$ . На какое минимальное расстояние они сблизятся?

Ответ;  $R_{\min} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

**Задача 5.** Шарик, заряженный до потенциала 792В имеет поверхностную плотность заряда  $333 \frac{H \cdot Кл}{м^2}$ . Найти радиус шара.

Ответ: 2,1см.

## 1.4. Краткие выводы первой главы

1. Со словами электричество, электрический заряд, электрический ток мы встречались много раз и успели к ним привыкнуть. Но попробуйте ответить на вопрос: «Что такое электрический заряд?» - и Вы убедитесь в том, что это не так-то просто. Дело в том, что понятие *заряд* – это основное, первичное понятие, которое не сводится на современном уровне развития наших знаний к каким-либо более простым, элементарным понятиям.

Существует минимальный заряд, называемый элементарным, которым обладают все заряженные элементарные частицы. Заряды элементарных частиц различаются лишь знаком.

Макроскопическое тело электрически заряжено в том случае, если оно содержит избыточное количество элементарных частиц с одним знаком заряда.

Отрицательный заряд тела обусловлен избытком электронов по сравнению с протонами, а положительный – недостатком электронов.

2. Наличие электрического заряда у тел или элементарных частиц означает, что они взаимодействуют друг с другом по закону Кулона;

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2}.$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности,  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{H \cdot м^2}{Кл^2}$ .

$q_2$  и  $q_3$  - электрические заряды. Кл.

$R$  - расстояние между электрическими зарядами, м.

3. Взаимодействие между зарядами осуществляется посредством электрического поля.

4. *Электрическое поле* – это особая форма материи, существующая независимо от наших представлений о нем. Доказательство реальности электрического поля – конечная скорость распространения электромагнитных взаимодействий.

Свойства электрического поля можно исследовать опытным путем.

**Но мы не можем сказать, из чего состоит электрическое поле, здесь мы доходим до границы того, что известно науке.**

О природе электрического поля можно сказать следующее

- поле материально, оно существует независимо от нас, от наших знаний о нём;

- поле обладает определенными свойствами, которые не позволяют его спутать с чем-либо другим в окружающем мире.

5. Главное свойство электрического поля – действие его на электрические заряды с некоторой силой

$$F = q \cdot E,$$

где  $q$  - электрический заряд, Кл.

$E$  - напряженность электрического поля,  $\text{В/м}$ .

6. Напряженность электрического поля является **силовой** его характеристикой и представляет отношение силы  $F$ , с которой электрическое поле действует на точечный заряд. К величине этого заряда  $q$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

7. Если в данной точке пространства различные заряженные частицы создают электрические поля, напряженность которых  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , то результирующая напряженность поля в этой точке равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n$$

Это равенство выражение выражает принцип **суперпозиции** (наложения) **напряженностей полей**.

8. В электрическом поле связанные заряды диэлектрика смещаются в противоположные стороны – происходит **поляризация** диэлектрика, который уже сам создает электрическое поле.

В однородном диэлектрике электрическое поле ослабевает в  $\epsilon$  раз,

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м.

## Глава 2. Магнитное поле

### 2.1. Магнитное взаимодействие. Магнитная индукция

Магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами).

Оно материально по своей природе, т.е. существует реально, независимо от наших ощущений. Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому воздействию на внесение в него проводника с током, или постоянные магниты. Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током.

Это явление было обнаружено в 1828г. датским физиком Х. Эрстедом, который установил:

- а) магнитное воздействие свойственно только движущимся электрическим зарядам;
- б) магнитное поле имеет вихревой характер. Направление магнитных силовых линий определяется по правилу буравчика;
- в) магнитные свойства вещества определяется элементарными круговыми токами в атомах и молекулах.

Важнейшей особенностью магнитного поля является то, что оно действует **только на движущиеся** в этом поле электрические заряды.

Магнитное поле может оказывать разнообразные воздействия, на другие физические объекты, оказавшиеся в этом поле.

Магнитное поле, как и электрическое поле, неощутимо органами чувств человека, но его наличие можно зарегистрировать с помощью магнитной стрелки компаса.

Механическое действие, которое магнитное поле оказывает на другие тела, можно характеризовать вектором силы, а само поле- векторной физической величиной, называемой **магнитной индукцией**, которая позволяет определить эту силу и обозначается буквой  $B$  и выражается в теслах (Тл).

Магнитная индукция является **силовой характеристикой** магнитного поля. Направление вектора магнитной индукции задаётся направлением магнитной стрелки, помещённой в данную точку поля. Оно совпадает с направлением, которое указывает северный полюс стрелки (рис. 11).

$$|B| = \frac{|F|}{|I| \cdot l} \quad (25)$$

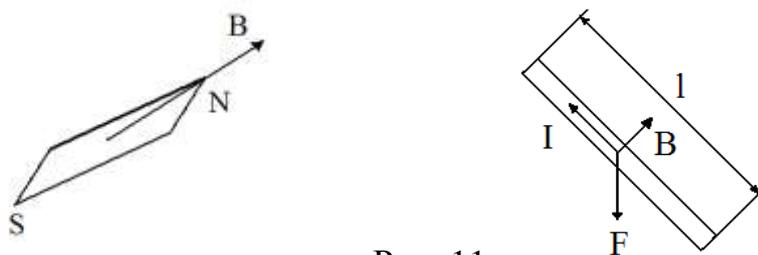


Рис. 11

## 2.2. Линии магнитной индукции (силовые линии). Силы Лоренца и Ампера

Наглядную картину магнитного поля получают, используя понятие о линиях магнитной индукции, касательные которых в каждой точке направлены так же, как и вектор  $B$  в той же точке.

Непрерывная линия, касательная к которой в любой её точке задаёт направление вектора магнитной индукции  $B$  называется **силовой линией** магнитного поля. Густота таких линий отражает модуль вектора магнитной индукции.

Направление силовых линий магнитного поля определяется правилом буравчика (правого винта): если вращать буравчик так, чтобы он перемещался по току, то направление вращения рукоятки совпадает с направлением силовых линий поля (рис. 12).

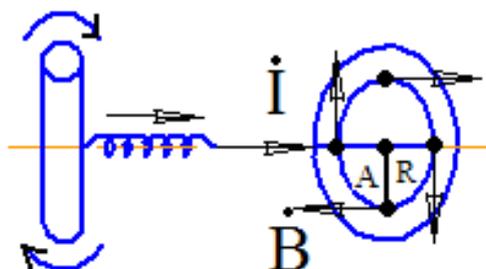


Рис. 12

Величина магнитной индукции в точке А (рис. 12) удаленной от проводника с током величиной  $I$  на расстояние, определяется выражением

$$B_A(\tau) = \frac{\mu \mu_0}{2\pi R} I \quad (26)$$

где  $\mu$ - магнитная проницаемость;  
 $\mu_0$ - магнитная проницаемость вакуума;

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / A}^2 \quad (27)$$

Исторически сложилось, что разделяют силы, действующие на движущийся свободный электрический заряд, например, ион, летящий в вакууме, и заряд, направленно перемещающийся в проводнике, - электрический ток. Природа этих сил в обоих случаях одинакова, однако в случае электрического тока в проводнике заряд не может покинуть проводник, поэтому можно говорить о силе, действующей в целом на проводник.

Магнитное поле действует на движущийся со скоростью  $V$  заряд  $q$  с некоторой силой, называемой *силой Лоренца*

$$F_{\Lambda} = q \cdot v \cdot B \sin \alpha \quad (27)$$

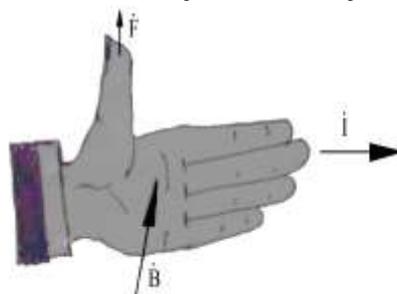
где  $\alpha$  - угол между вектором магнитной индукции  $B$  и скоростью  $V$ .

*Сила Лоренца всегда перпендикулярна вектору магнитной индукции  $B$  и скорости  $V$  движения заряда.*

Сила, с которой магнитное поле действует на прямоугольный проводник с током длиной  $L$ , по которому течёт ток  $I$ , действует *сила Ампера*, вычисляемая по формуле;

$$F_{\Lambda} = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin \alpha \quad (28)$$

где  $\alpha$  - угол между направлениями тока  $I$  и вектора магнитной индукции  $B$ .



Направление сил Лоренца и Ампера определяется **по правилу левой руки**. Если левую руку расположить так, чтобы линии магнитной индукции (силовые линии) входили бы в ладонь, а четыре пальца были направлены по движению положительных зарядов (или против движения отрицательных), то отогнутый на 90 большой палец покажет направление действующей силы  $F$  (рис. 13).

Рис. 13

Когда вещество заполняет пространство вокруг проводника с током, то магнитное поле создается не только этим током, но и движение заряженных частиц внутри атомов и молекул вещества-молекулярными токами, т.е. магнитные воздействия во всех случаях являются взаимодействиями токов.

В отсутствии внешнего магнитного поля создаваемые молекулярными токами поля оказываются скомпенсированными вследствие хаотичного движения атомов.

При наложении внешнего магнитного поля  $B_0$  эта компенсация нарушается и поле молекулярных токов изменяет индукцию магнитного поля в веществе: **тело намагничивается**, причем индукция магнитного поля в намагниченном веществе в одних случаях становится большим, а в других- меньше, чем  $B_0$ .

Отношение индукции магнитного поля в однородной среде  $B$  к индукции магнитного поля в вакууме  $B_0$  называют **магнитной проницаемостью  $\mu$** .

$$\mu = \frac{B}{B_0} \quad (29)$$

Эта величина характеризует магнитные свойства и зависит от ряда вещества и его состояния.

При  $\mu > 1$  имеем парамагнетики, при  $\mu < 1$  диамагнетиками. Такие вещества являются слабомагнитными. При  $\mu \gg 1$  вещества обладают сильными магнитными свойствами и носят название ферромагнитные.

### 2.3. Магнитный поток

Для количественного описания электромагнитных явлений, происходящих при движении замкнутых проводников в магнитном поле или при изменении магнитного поля в данной точке пространства с течением времени, вводится физическая величина, называемая **магнитным потоком  $\Phi$**  или **потоком вектора магнитной индукции**.

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (30)$$

где  $S$ - площадь, пронизываемая вектором магнитной индукции,  $m^2$ ;  
 $\alpha$ - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции (рис. 14).

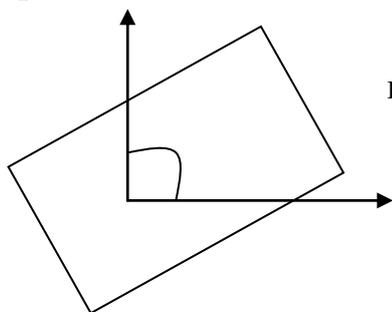


Рис. 14

Единицей измерения магнитного потока является вебер:  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$

### 2.4. Электромагнитная индукция

Когда по какому-либо проводнику или катушке с помощью источника тока пропускают электрический ток, то вокруг этого проводника с током или катушки возникает магнитное поле, воздействующее на магнит или другие проводники с током.

Явления электромагнитной индукции открыто в 1831 г. М. Фарадеем.

**Электромагнитная индукция** – это явление возникновения электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного поля, пронизывающего этот контур.

Причиной возникновения тока можно назвать изменение магнитного потока, пронизывающего контур. Возникающий при этом ток называют **индукционным током**.

Количественно явление электромагнитной индукции описывается законом электромагнитной индукции, который можно сформулировать так: **электродвижущая сила** индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром и пропорциональна числу ( $w$ ) витков в катушке

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} \quad (31).$$

Индукционный ток всегда направлен так, что своим полем противодействует причине его вызывающей. Поэтому явление электромагнитной индукции описывается не только законом Фарадея, но и правилом Ленца, поэтому в формуле (31) присутствует знак «минус».

Открытие явления электромагнитной индукции привело к осознанию единства электрических и магнитных полей, открытию электромагнитных волн, созданию генераторов электрического тока и др.

Если проводник перемещается в однородном магнитном поле, то ЭДС возникающая в нем, равна разности потенциалов на его концах и определяется по закону Фарадея.

$$e = -B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin \alpha \quad (32)$$

## 2.5. Индуктивность. Самоиндукция. Взаимная индукция

**Взаимная индукция и самоиндукция** являются частными случаями электромагнитной индукции. **Самоиндукцией** называется явление возникновения индуцированного тока в этой цепи. Изменения тока вызывает изменения его собственного магнитного поля. В проводнике с током, который находится в магнитном поле, возникает явление электромагнитной индукции, характеристикой которой служит ЭДС самоиндукции. ЭДС самоиндукции называется возникновение ЭДС индукции в электрической цепи в результате изменения силы тока. ЭДС самоиндукции препятствует изменению силы тока.

Собственное магнитное поле в контуре создает магнитный поток  $\Phi$ , сквозь площадь поверхности, ограниченная самим контуром.

Магнитный поток не в ферромагнитной среде пропорционален силе тока  $I$  в контуре

$$\Phi = L \cdot I \text{ или } d\Phi = L \frac{di}{dt} \quad (33)$$

$$\text{Тогда } e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (34)$$

Величина  $L$  называется **индуктивностью контура и является его электрической характеристикой**.

Значение  $L$  зависит от размеров контура, его геометрической формы и относительной магнитной проницаемости среды, в которой находится контур.

Для достаточно длинного соленоида длиной  $\ell$  и площадью сечения витка  $S$  и с общим числом витков  $w$  индуктивность равна.

$$L = \mu \cdot \mu_0 \frac{w^2 \cdot S}{\ell} \quad (35)$$

Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида называется **потокосцеплением  $\Psi$**

$$\Psi = w \cdot \Phi = \mu \cdot \mu_0 \cdot H \cdot S \cdot w = \mu \cdot \mu_0 \cdot H \cdot \frac{w^2}{\ell} \quad (36)$$

Индуктивность контура является мерой его «инертности» по отношению к изменению тока в контуре, т.е. в электродинамике индуктивность играет такую же роль, как масса ( $m$ ) тела в механике.

## 2.6. Краткие выводы второй главы

1. Взаимодействие между электрическими токами осуществляется посредством магнитного поля, основной характеристикой которого является вектор магнитной индукции  $B$ .

2. За направление вектора магнитной индукции  $B$  принимают направление нормали к рамке с током, имеющей возможность свободно ориентироваться в магнитном поле. Направление нормали совпадает с направлением магнитной стрелки в поле.

3. Линии магнитной индукции охватывают проводники с током и всегда замкнуты. Такие поля называются вихревыми.

4. Согласно закону Ампера на проводник с током длиной ( $\ell$ ) со стороны магнитного поля действует сила, модуль которой равен

$$F_A = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между проводником и вектором магнитной индукции  $B$ .  
Направление силы определяется правилом **левой руки**.

5. На движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца, модуль которой равен:

$$F_{\perp} = q \cdot V \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между скоростью частицы и вектором магнитной индукции  $B$ .

Сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы, поэтому работы не совершает.

6. Все тела в магнитном поле намагничиваются, т.е. сами создают магнитное поле. Отношение модуля вектора магнитной индукции в однородной среде к магнитной индукции в вакууме называют магнитной проницаемостью, которая характеризует магнитные свойства вещества.

7. У большинства веществ магнитные свойства выражены слабо. Лишь у ферромагнитных тел, к которым относятся железо, магнитная проницаемость очень велика ( $\mu \gg 1$ ) и зависит от магнитной индукции.

## Глава 3. Линейные электрические цепи постоянного тока

### 3.1. Основные формулы и уравнения

*Закон сохранения электрического заряда*

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = \text{const}$$

*Закон Кулона*

$$F_k = K \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\varepsilon \cdot r^2} ; \quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

*Напряжённость электрического поля точечного заряда  $q_0$ .*

$$E = \frac{F_k}{|q|} = \frac{|q_0| \cdot |q_1|}{\varepsilon R^2 \cdot |q|} = K \frac{q_0}{\varepsilon R^2}$$

$$\Sigma E_\Sigma = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

*Напряжение (разность потенциалов)*

$$\Delta \varphi = U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_1}{q} - \frac{W_2}{q} = E \cdot d$$

$$\varphi = \frac{K q_0}{\varepsilon \cdot R^2}$$

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n$$

*Работа в электрических полях*

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$$

*Емкость*

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{d}$$

*Электродвижущая сила (ЭДС)*

$$E = \frac{A_{\text{стоп.}}}{q}$$

*Сила тока*

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}, \quad I = \frac{dq}{dt}$$

*Закон Ома*

$$I = \frac{U}{R}; \quad I = \frac{E}{R + R_0}$$

*Сопротивление проводника*

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

*Магнитная индукция*

$$B = \frac{M_{\max}}{I \cdot S}$$

*Магнитное поле проводника с током*

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 I}{2\pi R}$$

*Сила Ампера*

$$F_A = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin \alpha$$

*Сила Лоренца*

$$F_{\wedge} = q \cdot \mathcal{G} \cdot B \cdot \sin \alpha$$

*Магнитный поток*

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

*Закон электромагнитной индукции*

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \cdot w; \quad E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot w \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}$$

*Индуктивность*

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

*ЭДС самоиндукции*

$$E_{cn} = -w \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}; E_c = -w \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ при } \Delta t \rightarrow 0$$

*Энергия магнитного поля*

$$W = L \frac{I^2}{2}$$

*Энергия электрического поля*

$$W = C \frac{U^2}{2}$$

*Закон Ома для участка цепи с ЭДС*

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b \pm E}{R + R_0} = \frac{U_{ab} \pm E}{R + R_0}$$

*Полная мощность источника тока*

$$P_{\text{ист}} = E \cdot I = I^2 (R + R_0) = \frac{E^2}{R + R_0}$$

*Активная (полезная) мощность*

$$P = I^2 \cdot R = E^2 \cdot \frac{R}{R + R_0}$$

*Мощность тепловых потерь*

$$P_{\text{т0}} = P_{\text{ном}} = I \cdot E - I^2 \cdot R = I^2 \cdot R_0 = \frac{E^2 \cdot R_0}{(R + R_0)^2}$$

Коэффициент полезного действия (КПД)

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ист.}}} = \frac{U}{E} = \frac{R}{R+R_0}$$

Максимальное значение мощности при  $R=R_0$  и при  $I = \frac{E}{R+R_0}$   $P_{\text{max}} = \frac{E^2}{4R_0}$

Первый закон Кирхгофа

$$\sum_0^n I_k = 0$$

-второй закон

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k R_k = \sum_{i=1}^{i=m} E_i; \quad \sum_{k=1}^{k=n} U_k = 0$$

### 3.2. Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Для электрической схемы приведённой на рисунке 15, определить токи в ветвях, показание вольтметра, составить баланс мощностей и построить потенциальную диаграмму по внешнему контуру, если известно

$$E=300 \text{ В}; R_1=5 \text{ Ом};$$

$$R_2=15 \text{ Ом}; R_3=10 \text{ Ом};$$

$$R_4=40 \text{ Ом}; R_5=30 \text{ Ом};$$

$$R_6=12 \text{ Ом}; R_7=8 \text{ Ом};$$

$$R_8=20 \text{ Ом}.$$

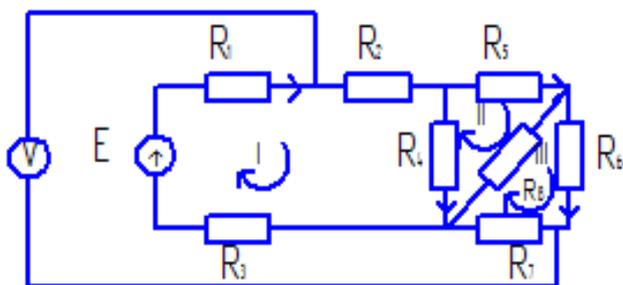


Рис. 15

Решим задачу, используя 1-й и 2-й Законы Кирхгофа.

Для нахождения токов нужно составить пять уравнений: два уравнения по 1-му закону и три уравнения по 2-му закону Кирхгофа.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 - I_2 - I_3 = 0. \\ I_3 + I_4 + I_5 - I_1 = 0. \\ I_1(R_1 + R_2 + R_3) + I_3 R_4 = E. \\ I_2 R_5 + I_4 R_8 - I_3 R_4 = 0. \\ I_5(R_6 + R_7) - I_4 R_8 = 0. \end{array} \right.$$

Подставляя численные значения ЭДС сопротивлений, получим систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0. \\ I_3 + I_4 + I_5 - I_1 = 0. \\ 30I_1 + 40I_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 30I_2 + 20I_4 - 40I_3 = 0. \\ 20I_5 - 20I_4 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений даёт такие значения токов:  $I_1 = 6\text{A}$ ;  $I_2 = I_3 = 3\text{A}$ ;  $I_4 = I_5 = 1.5\text{A}$ .

Проверку правильности нахождения токов производим по балансу мощности.

$$\sum_1^n E_k I_k = \sum_1^m I_i^2 R_i$$

$$\sum E_k I_k = E \cdot I_1 = 300 \cdot 6 = 1800 \text{Bm}$$

$$\begin{aligned} \sum I_i^2 R_i &= I_1^2 (R_1 + R_2 + R_3) + I_2^2 R_5 + I_3^2 R_4 + I_4^2 R_8 + I_5^2 (R_6 + R_7) = \\ &= 6^2 (5 + 15 + 10) + 3^2 \cdot 30 + 3^2 \cdot 40 + 1.5^2 \cdot 12 + 1.5^2 \cdot 8 = 1800 \text{Bm} \end{aligned}$$

Имеем  $1800 = 1800 \text{Вт}$ , т. е. токи найдены правильно.

Для построения потенциальной диаграммы по внешнему контуру расчётной схемы (рис. 15) найдем потенциалы точек, принимая потенциал точки «а» равны нулю.

$$\varphi_a = 0.$$

$$\varphi_k = \varphi_a + I_1 R_2 = 0 + 6 \cdot 15 = 90 \text{ В}$$

$$\varphi_e = \varphi_k + I_1 R_1 = 90 + 6 \cdot 5 = 120 \text{ В}$$

$$\varphi_d = \varphi_e - E = 120 - 300 = -180 \text{ В}$$

$$\varphi_b = \varphi_d + I_1 R_3 = -180 + 6 \cdot 10 = -120 \text{ В}$$

$$\varphi_m = \varphi_b + I_5 R_7 = -120 + 1.5 \cdot 8 = -108 \text{ В}$$

$$\varphi_c = \varphi_m + I_5 R_6 = -108 + 1.5 \cdot 12 = -90 \text{ В}$$

$$\varphi_a = \varphi_c + I_2 R_5 = -90 + 3 \cdot 30 = 0$$

Потенциальная диаграмма представлена на рис. 16.

Находим показание вольтметра  $U_{km}$

$$U_{km} = \varphi_k - \varphi_m = 90 - (-108) = 198 \text{ В}.$$

Показание вольтметра можно найти, используя вторую формулировку 2<sup>го</sup>

закона Кирхгофа  $\sum_{k=1}^{k=n} U_k = 0$

$$U_{km} + I_5 R_7 + I_1 (R_3 + R_4) = E.$$

$$U_{km} = E - I_5 R_7 - I_1 (R_3 + R_4) = 300 - 1,5 \cdot 8 - 6(10 + 5) = 198 \text{ В.}$$

Или

$$U_{km} - I_5 R_6 - I_2 R_5 - I_1 R_2 = 0$$

$$U_{km} = I_5 R_6 + I_2 R_5 + I_1 R_2 = 1,5 \cdot 12 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 15 = 198 \text{ В;}$$

т.е. имеем один и тот же результат.

$$m_\varphi = \frac{3B}{\text{мм}}; m_R = \frac{10\text{М}}{\text{мм}}$$

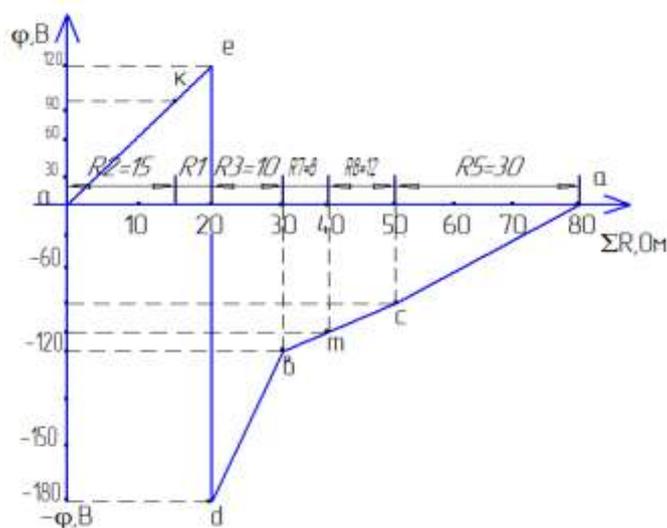


Рис. 16

**Задача 2.** Определить сопротивление цепи между зажимами 1 и 4 (рис. 17) если сопротивления  $R_1 = R_2 = R_3 = 18 \text{ Ом}$ .

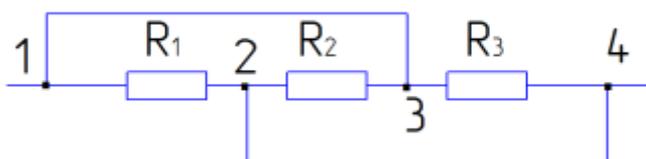


Рис. 17

Представим схему рис.17. несколько иначе (рис.18).

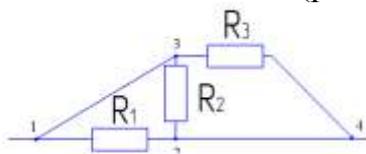


Рис. 18

Из рисунка видно, что сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  соединены параллельно.

Тогда их эквивалентное сопротивление равно.

$$\frac{1}{R_{1,4}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}; R_{1,4} = 6 \text{ Ом}$$

**Пример 3.** Определить входное сопротивление  $R_{\text{вхав}}$  цепи, схема которой показана на рис. 19.

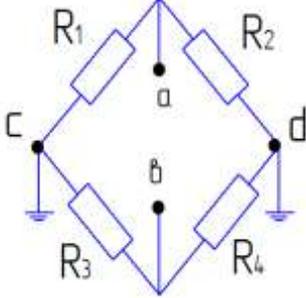


Рис. 19

Поскольку точки  $c$  и  $d$  заземлены, то их можно объединить в одну точку  $c$  сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ ,  $R_4$ , контакты подключены параллельно, а их эквивалентные сопротивления  $R_{1,2}$  и  $R_{3,4}$  соединены последовательно (рис.20).

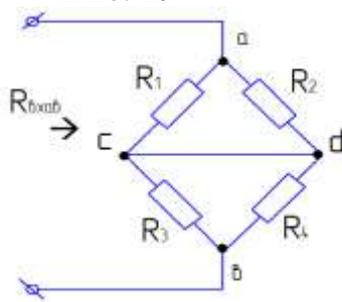


Рис. 20

$$R_{bxab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

При  $R_1=R_2=R_3=R_4=R$  имеем

$$R_{bxab} = \frac{R^2}{2R} + \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$



Рис. 21

**Пример 4.** Внешняя характеристика источника энергии задана на рис. 21.

Составить схему замещения цепи и определить  $E$ ,  $R_0$  и  $R_{\text{н}}$ , если сила тока в цепи равна 3 А.

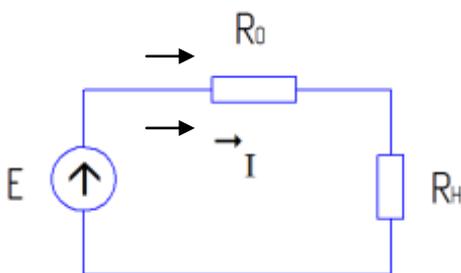


Рис. 22

Рисуем схему замещения источников энергии (рис. 22). Из рис. 21 при  $I_1=1\text{А}$ ;  $U_1=92\text{В}$ ;  $I_2=3\text{А}$ ;  $U_2=80\text{В}$ .

Запишем уравнение электрического состояния цепи.

$$U_1 = E - I_1 R_0; \quad E = U_1 + I_1 R_0 (*)$$

$$U_2 = E - I_2 R_0; \quad E = U_2 + I_2 R_0 (**)$$

Приравняв правые части уравнений (\*) и (\*\*), получим

$$R_0 = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{92 - 80}{3 - 1} = 6 \text{ Ом}$$

Сопротивление нагрузки  $R_H$

$$R_H = \frac{U_2}{I_2} = \frac{80}{3} = 26,7 \text{ Ом}$$

**Задача 5.** На электрической лампочке указаны её номинальные данные 60Вт и 220В. Определить её сопротивление

$$R_x = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{60} = 806,7 \text{ Ом}$$

**Задача 6.** Составить уравнения по законам Кирхгофа, необходимые для расчёта токов во всех ветвях, считая известными сопротивления, ЭДС и ток источника тока (рис. 23).

**Решение:**

Число ветвей или число неизвестных токов (источник тока не учитываем), так как ток его известен  $b=9$ , число узлов  $y=6$ .

Для расчётов тока необходимо составить пять уравнений по первому закону Кирхгофа ( $y-1=5$ ). По второму закону Кирхгофа надо составить четыре уравнения ( $b-(y-1)=9-(6-1)=4$ ).

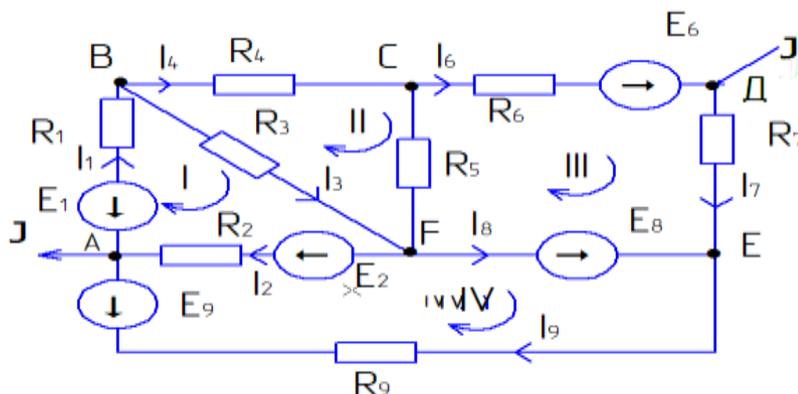


Рис. 23

$$\begin{array}{l}
 \text{Т. А.} \\
 \text{Т. В.} \\
 \text{Т. С.} \\
 \text{Т. Д.} \\
 \text{Т. Е.}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 -I_1 + I_2 + I_9 = J \\
 I_1 + I_3 - I_4 = 0 \\
 I_4 + I_5 - I_6 = 0 \\
 I_6 - I_7 = -J \\
 I_7 + I_8 - I_9 = 0 \\
 I_1 R_1 - I_3 R_3 + I_2 R_2 = E_1 + E_2. \\
 I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0 \\
 I_5 R_5 + I_6 R_6 + I_7 R_7 = E_6 - E_8. \\
 I_9 R_9 - I_2 R_2 = E_8 - E_g - E_2
 \end{array}
 \right.$$

Решение этой системы уравнений даёт нам точка в ветвях.

**Задача 7.** Найти точки в схемы рис.24 при помощи контурных токов, если известно:

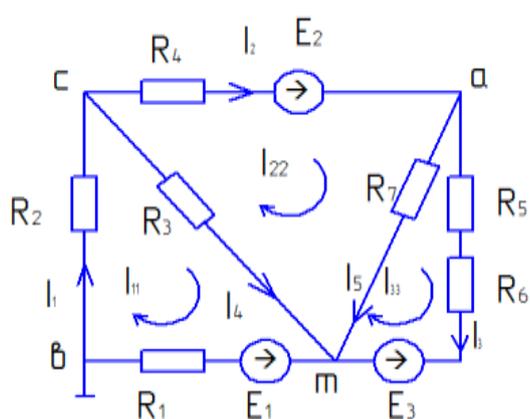


Рис. 24

$$E_1=10\text{В}; E_2=10\text{В}; E_3=8\text{В}.$$

$$R_1=4\text{Ом}; R_2=5\text{Ом}; R_3=5\text{Ом};$$

$$R_4=10\text{Ом}; R_5=2\text{Ом}; R_6=1\text{Ом}; R_7=2\text{Ом}.$$

Выбираем направление всех контурных токов по ходу часовой стрелки.

Записываем систему уравнений по 2-му закону Кирхгофа относительно этих контурных токов.

$$\begin{cases}
 I_{11}(R_1+R_2+R_3)-I_{22}R_3=-E_1 \\
 I_{22}(R_3+R_4+R_7)-I_{11}R_3-I_{33}R_7=E_2 \\
 I_{33}(R_5+R_6+R_7)-I_{22}R_7=-E_3
 \end{cases}$$

Подставим численные значения ЭДС и сопротивлений и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{l}
 14 I_{11} - 5 I_{22} = -10; \\
 17 I_{22} - 5 I_{11} - 2 I_{33} = 10; \\
 5 I_{33} - 2 I_{22} = -8.
 \end{array}$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009$$

Контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0,635 \text{ A}$$

$$I_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{226}{1009} = 0,225 \text{ A}$$

$$I_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -5 & -10 \\ -5 & 17 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1524}{1009} = 1,52 \text{ A}$$

Действительные токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = -0,635 \text{ A}, \\ I_2 &= I_{22} = 0,225 \text{ A}, \\ I_3 &= I_{33} = 1,52 \text{ A}, \\ I_4 &= I_{11} - I_{22} = -0,635 - 0,225 = -0,86 \text{ A}, \\ I_5 &= I_{22} - I_{33} = 0,225 - 1,52 = -1,295 \text{ A}. \end{aligned}$$

**Задача 8 .** Найти токи в схеме, если известно  $E_1=120\text{В}$ ,  $R_1= 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2=4\text{Ом}$ ,  $R_3= 1 \text{ Ом}$ ,  $R_4= 10 \text{ Ом}$ ,  $E_3= 50 \text{ В}$ .

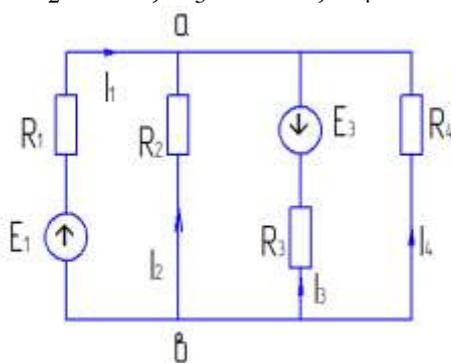


Рис. 25

Решаем методом двух узлов. Находим напряжение между узлами а и б.

$$U_{ab} = \frac{\sum_1^n E_k q_k}{\sum_1^m q_k} = \frac{E_1 q_1 - E_3 q_3}{q_1 + q_2 + q_3 + q_4} = \frac{120 \cdot 1 - 50 \cdot 1}{2 + 4 + 1 + 10} = \frac{70}{17} = 4,12 \text{ В}.$$

Используя Закон Ома для участка цепи ЭДС, находим токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = \frac{120 - 4,12}{2} = 57,94 \text{ A},$$

$$I_2 = -\frac{U_{ab}}{R_2} = -\frac{5,4}{4} = -1,35 \text{ A},$$

$$I_3 = -\frac{E_3 - U_{ab}}{R_3} = \frac{-50 - 5,4}{1} = -55,4 \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{-U_{ab}}{R_4} = \frac{-5,4}{10} = -0,3 \text{ A},$$

Составляем баланс мощностей:

$$\sum_1^n E_k I_k = \sum_1^m I_i R_i; \quad n=2, \quad m=4.$$

$$\sum_1^2 E I = E_3 I_3 = 9647 \text{ Вт.}$$

$$\sum_1^4 I_i^2 R_i = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 9647 \text{ Вт, т.е. токи найдены верно.}$$

**Задача 9.** В электрической цепи определить токи, используя метод преобразования, если известно:  $E_2 = 300 \text{ В}$ ,  $E_1 = 20 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = R_5 = R_6 = 30 \text{ Ом}$ ,  $E_3 = 450 \text{ В}$ .

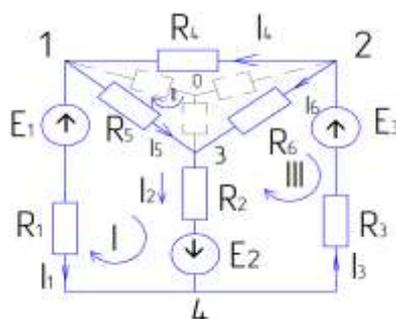


Рис. 26

Треугольник сопротивлений  $R_4, R_5, R_6$  заменим эквивалентной звездой.

Рисуем эквивалентную схему и, используя метод двух узлов, находим токи  $I_1, I_2, I_3$ .

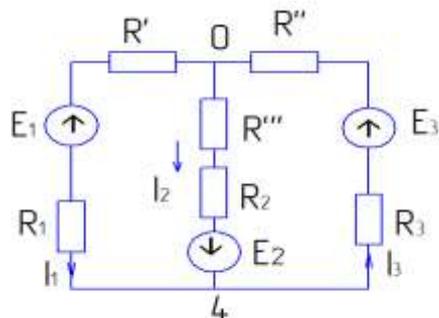


Рис. 27

$$R = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{900}{30 + 30 + 30} = 10 \text{ Ом.}$$

$$R = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{900}{30 + 30 + 30} = 10 \text{ Ом.}$$

$$R = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{900}{30 + 30 + 30} = 10 \text{ Ом.}$$

Определяем напряжение между точками О и 4.

$$U_{O4} = \frac{\sum_1^n E_k q_k / \sum_1^m q_k}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = E_1 \frac{1}{R_1} - E_2 \frac{1}{R_2} + E_3 \frac{1}{R_3} = 140 \text{ В}$$

Определяем токи в ветвях, используя закон Ома для участка цепи с ЭДС

$$I_1 = \frac{-E_1 + U_{O4}}{R_1 + R} = \frac{-20 + 140}{10 + 10} = 6 \text{ А.}$$

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{O4}}{R_2 + R} = \frac{300 + 140}{20 + 10} = 14,67 \text{ А.}$$

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{O4}}{R_3 + R} = \frac{450 - 140}{5 + 10} = 20,67 \text{ А.}$$

Для нахождения токов  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$  вернемся к расчетной схеме (рис. 9). Для контура 1-3-4-1 запишем уравнение по второму закону Кирхгофа имеем

$$-I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_2 R_2 = E_1 + E_2 \quad \text{отсюда}$$

$$I_5 = \frac{E_1 + E_2 + I_1 R_1 - I_2 R_2}{R_5} = \frac{20 + 300 + 600 - 14,67 \cdot 20}{30} = 2,88 \text{ А.}$$

Из контура 2-3-4-2 имеем

$$-I_2 R_2 - I_6 R_6 - I_3 R_3 = -E_2 - E_3$$

$$\text{Отсюда } I_6 = \frac{-I_2 R_2 - I_3 R_3 + E_2 + E_3}{R_6} = \frac{-14,67 \cdot 20 - 20,67 \cdot 5 + 300 + 450}{30} = 11,77 \text{ А.}$$

Из контура 1-2-3-1 имеем  $I_6 R_6 - I_5 R_5 = 0$  отсюда

$$I_4 = \frac{I_6 R_6}{R_4} = \frac{11,77 \cdot 30 - 2,88 \cdot 30}{30} = 8,89 \text{ А}$$

Проверку правильности токов по балансу мощностей  $\sum_1^3 E_k I_k = \sum_1^6 I_i^2 R_i$

$$\sum_1^3 E_k I_k = -E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = -20 \cdot 6 + 300 \cdot 14,67 + 450 \cdot 20,67 = 13582,5 \text{ Вт}$$

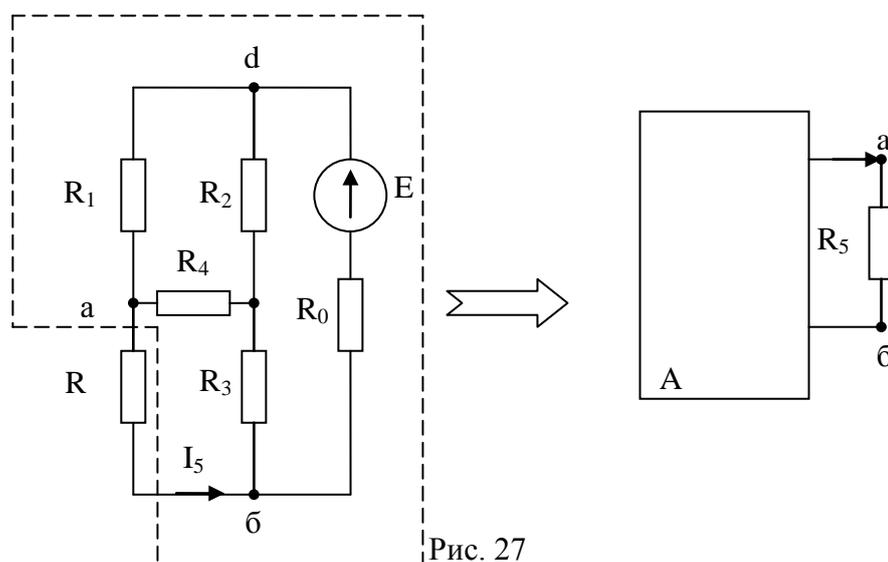
$$\sum_1^6 I_i^2 R_i = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 6^2 \cdot 10 + 14,67^2 \cdot 20 + 20,67^2 \cdot 5 + 8,89^2 \cdot 30 + 2,88^2 \cdot 30 + 11,77^2 \cdot 30 = 13576,57 \text{ Вт}$$

Имеем  $13582,5 \approx 13576,57$  Вт

Ошибка составляет  $\Delta = \frac{13582,5 - 13576,57}{13582,5} \cdot 100\% = 0,04\%$ , т.е. можно считать,

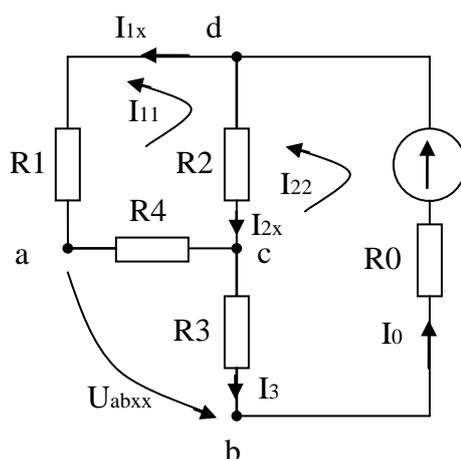
что точки найдены, верно.

**Задача 10.** Для электрической цепи (рис. 27) определить ток, протекающий через резистор  $R_5$  методом эквивалентного генератора, если известно  $E=23\text{В}$ ,  $R_1=730\text{ Ом}$ ,  $R_2=R_3=500\text{ Ом}$ ,  $R_4=1000\text{ Ом}$ ,  $R_0=200\text{ Ом}$ ,  $R_5=613\text{ Ом}$ .



Силу тока  $I_5$  находим из уравнения  $I_5 = \frac{E_{\text{эк}}}{R_{\text{эк}} + R_5}$  ;

Для нахождения напряжения  $U_{abxx}$  проводится опыт холостого хода (рис. 28). Из контура асба находим  $U_{abxx} = I_{3\delta} R_3 + I_{4\delta} R_4$ . Токи  $I_{3x}$  и  $I_{4x}$  найдём, используя метод контурных токов (рис. 28).



$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_4 + R_2) - I_{22}R_2 = 0 \\ I_{22}(R_2 + R_3 + R_0) - I_{11}R_2 = E \end{cases}$$

После подстановки численных значений сопротивлений и ЭДС имеем систему уравнений.

$$\begin{cases} I_{11}(750+1000+500) - I_{22} \cdot 500 = 0 \\ I_{22}(500+500+200) - 500 \cdot I_{11} = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2230 I_{11} - 500 I_{22} = 0 \\ -500 I_{11} + 1200 I_{22} = 23 \end{cases}$$

$$I_{11} = \frac{500 \cdot I_{22}}{2230} = 0.2242 \cdot I_{22}$$

$$0,2242 I_{22} + 1200 I_{22} = 23$$

$$I_{22} = \frac{23}{1200.2242} = 0.019163A$$

$$I_{11} = 0.2242 \cdot I_{22} = 0.2242 \cdot 0.019163 = 0.004296A$$

Теперь определим токи  $I_{3x} I_{4x}$

$$I_{3x} = I_{22} = 0.019163A$$

$$I_{4x} = I_{1x} = I_{11} = 0.004296A$$

Тогда  $U_{abxx} = I_{3x} \cdot R_3 + I_{4x} R_4 = 0.019163 \cdot 500 + 0.004296 \cdot 1000 = 13.88B$

Для нахождения  $R_{\dot{y}\dot{e}\dot{a}} = R_{\dot{a}\dot{o}}$  при закороченной ЭДС схема (рис. 27) примет вид (рис. 29) треугольник сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_4$  заменим на эквивалентную звезду. Находим сопротивления лучей эквивалентной звезды (рис. 29 и рис. 30)

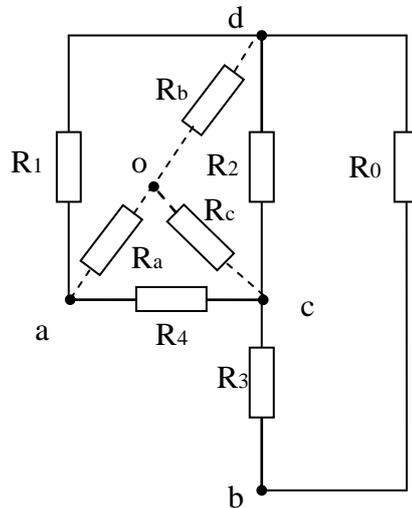


Рис. 29

$$R_d = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{730 \cdot 500}{730 + 500 + 1000} = 163.677 \text{ Ом}$$

$$R_c = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{500 \cdot 1000}{730 + 500 + 1000} = 224.215 \text{ Ом}$$

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{730 \cdot 1000}{730 + 500 + 1000} = 327.354 \text{ Ом}$$

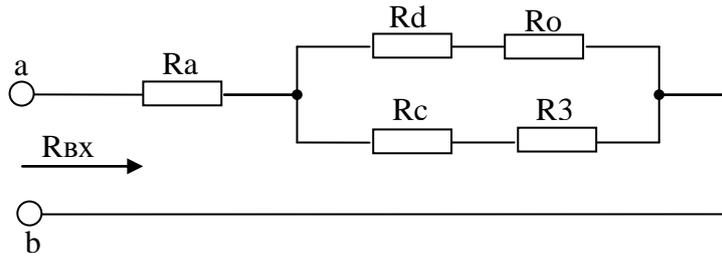


Рис. 30

$$R_{bx} = R_a + \frac{(R_d + R_0)(R_c + R_3)}{R_d + R_0 + R_c + R_3} = 327.354 + \frac{(163.677 + 200)(224.215 + 500)}{163.667 + 200 + 224.215 + 500} = 569.456 \text{ Ом}$$

Теперь находим ток, протекающий через резистор  $R_5$

$$I_5 = \frac{U_{abxx}}{R_{bx} + R_5} = \frac{13.88}{569.456 + 613} = 0.011738 \text{ А}$$

**Задача 11.** Рассчитать методом наложения токи в ветвях цепи, изображённых на рисунке 31, если  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 4 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 30 \text{ В}$ ,  $E_2 = 50 \text{ В}$

Найдем токи в цепи от действия каждой ЭДС в отдельности (рис. 32)

$$R_{56} = R_5 + R_6 = 2 + 4 = 6 \text{ Ом}$$

$$R_{456} = \frac{R_4 \cdot R_{56}}{R_4 + R_{56}} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2.4 \text{ Ом}$$

$$R_{3456} = R_3 + R_{456} = 3 + 2.4 = 5.4 \text{ Ом}$$

$$R_{23456} = \frac{R_2 \cdot R_{3456}}{R_2 + R_{3456}} = \frac{5 \cdot 5.4}{5 + 5.4} = 2.59 \text{ Ом}$$

$$R_{\text{экв}} = R_{23456} + R_1 = 2.59 + 1 = 3.59 \text{ Ом}$$

Ток в ветви с  $\dot{A}_1$

$$I_1' = \frac{E_1}{R_{\text{экв}}} = \frac{30}{3.59} = 8.35 \text{ А}$$

Напряжение между узлами 1 и 2

$$U_{12} = R_{23456} \cdot I_1' = 2.59 \cdot 8.35 = 21.6 \text{ В}$$

Токи в ветвях  $R_2$  и  $R_3$

$$I_2' = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{21.6}{5} = 4.33 \text{ А}$$

$$I_3' = \frac{U_{12}}{R_{3456}} = \frac{21.6}{5.4} = 4.00 \text{ А}$$

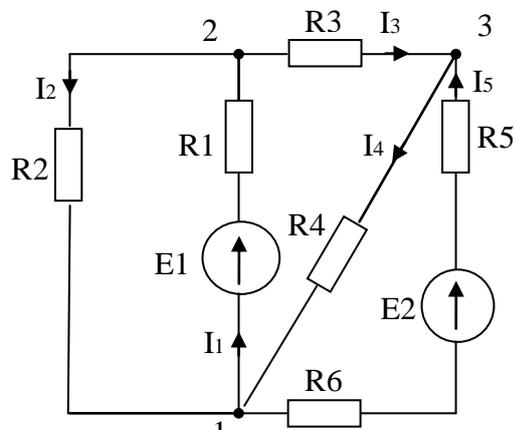


Рис. 31

Определим напряжение между узлами 1 и 3

$$U_{13} = R_4 \cdot I_3' = 4 \cdot 4 = 16 \text{ В}$$

Токи в ветвях с сопротивлением  $R_4$  и  $R_5$  и  $R_6$

$$I_4' = \frac{U_{13}}{R_4} = \frac{9.6}{4} = 2.4 \text{ А}$$

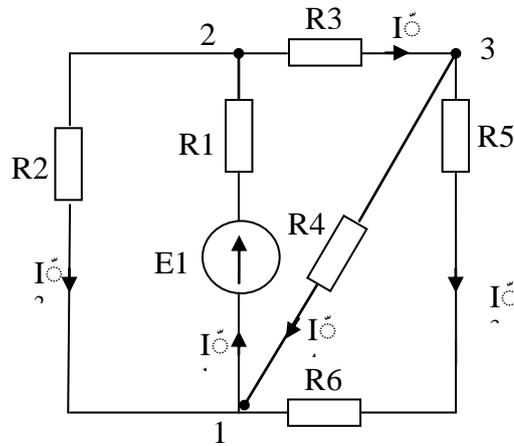


Рис. 32

$$I_5' = \frac{U_{13}}{R_{56}} = \frac{9.6}{6} = 1.6 \text{ А}$$

Аналогично находим токи в ветвях от действия только ЭДС  $E_5$  (рис. 33)

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 5}{1 + 5} = 0.833 \text{ Ом}$$

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 0.833 + 3 = 3.83 \text{ Ом}$$

$$R_{1234} = \frac{R_4 \cdot R_{123}}{R_4 + R_{123}} = \frac{4 \cdot 3.83}{4 + 3.83} = 1.95 \text{ Ом}$$

$$R_{\text{экв}}'' = R_{1234} + R_5 + R_6 = 1.95 + 2 + 4 = 7.95 \text{ Ом}$$

Находим силу тока в ветви с ЭДС  $E_5$

$$I_5'' = \frac{E_5}{R_{\text{экв}}''} = \frac{50}{7.95} = 6.29 \text{ А}$$

Напряжение между узлами 1 и 3

$$U_{13} = R_{1234} \cdot I_5'' = 1.95 \cdot 6.29 = 12.3 \text{ В}$$

Токи в ветвях с сопротивлениями  $R_3$

и  $R_4$

$$I_3'' = \frac{U_{13}}{R_{123}} = \frac{12.3}{3.83} = 3.22 \text{ А}$$

$$I_4'' = \frac{U_{13}}{R_4} = \frac{12.3}{4} = 3.08 \text{ А}$$

Напряжение между узлами 1 и 2

$$U_{12} = R_{12} \cdot I_3'' = 0.833 \cdot 3.22 = 2.68 \text{ В}$$

Токи в ветвях с сопротивлением  $R_1$  и  $R_2$

$$I_2'' = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{2.68}{5} = 0.536 \text{ А}$$

$$I_1'' = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{2.68}{1} = 2.68 \text{ А}$$

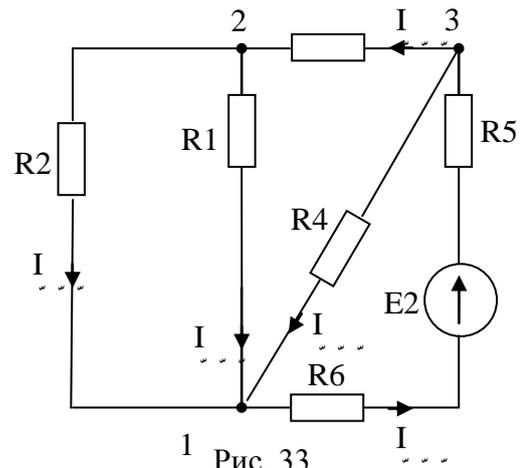


Рис. 33

Направление найденных токов показано на рис. 32 и рис. 33.

Суммируя по методу наложения токи в ветвях, выберем положительные направления результирующих токов (рис. 31) с тем расчётом, чтобы их числовые значения оказались положительными. Тогда получим окончательно:

$$\begin{aligned}i_1 &= i_1' - i_1'' = 8.35 - 2.68 = 5.65 \text{ A} \\i_2 &= i_2' - i_2'' = 4.33 - 0.536 = 4.866 \text{ A} \\i_3 &= i_3' - i_3'' = 4.0 - 3.22 = 0.78 \text{ A} \\i_4 &= i_4' + i_4'' = 2.4 + 3.08 = 5.48 \text{ A} \\i_5 &= i_5' - i_5'' = 6.29 - 1.60 = 4.69 \text{ A}\end{aligned}$$

**Задача 12.** Для схемы, проведённой на рис. 34, определить токи в ветвях, используя метод противоположных величин, если известно:  $E=200\text{В}$ ;  $R_1 = 3\text{Ом}$ ,  $R_2 = 3\text{Ом}$ ,  $R_3 = 26 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 8 \text{ Ом}$ .

**Решение:**

Задаёмся током  $I_5 = 1 \text{ А}$ , находим токи и напряжения на других ветвях.

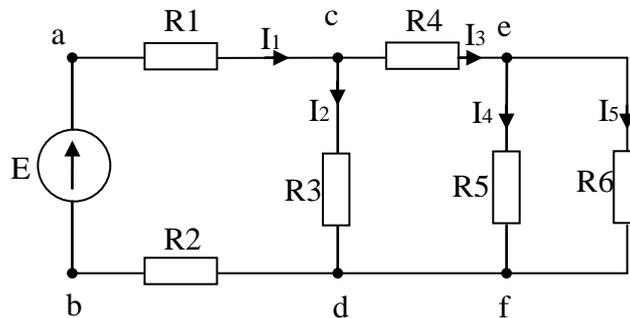


Рис. 34

$$U_{ed} = I_5 \cdot R_6 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ В}$$

$$I_4 = \frac{U_{ed}}{R_5} = \frac{8}{4} = 2 \text{ А}$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 2 + 1 = 3 \text{ А}$$

$$U_{cd} = U_{ed} + I_3 R_4 = 8 + 3 \cdot 6 = 26 \text{ В}$$

$$I_2 = \frac{U_{cd}}{R_3} = \frac{26}{26} = 1 \text{ А}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 1 + 3 = 4 \text{ А}$$

$$U_{ab} = U_{cd} + I_1 (R_1 + R_2) = 26 + 4(3 + 3) = 50 \text{ В}$$

## 2. Коэффициент пересчёта

$$K = \frac{E}{U_{ab}} = \frac{200}{50} = 4 \text{ A}$$

## 3. Фактические токи в ветвях

$$I_1 = 16 \text{ A}$$

$$I_2 = 4 \text{ A}$$

$$I_3 = 3 * 4 = 12 \text{ A}$$

$$I_4 = 8 \text{ A}$$

$$I_5 = 4 \text{ A}$$

**Задача 13.** Для электрической цепи (рисунок 35) найти токи в ветвях методом узловых потенциалов, если известно:  $R_{12} = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_{13} = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_{14} = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_{24} = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_{34} = 5 \text{ Ом}$ ,  $E_{12} = 100 \text{ В}$ ,  $E_{13} = 25 \text{ В}$ ,  $E_{14} = 30 \text{ В}$ ,  $E_{24} = 120 \text{ В}$ ,  $E_{34} = 180 \text{ В}$ .

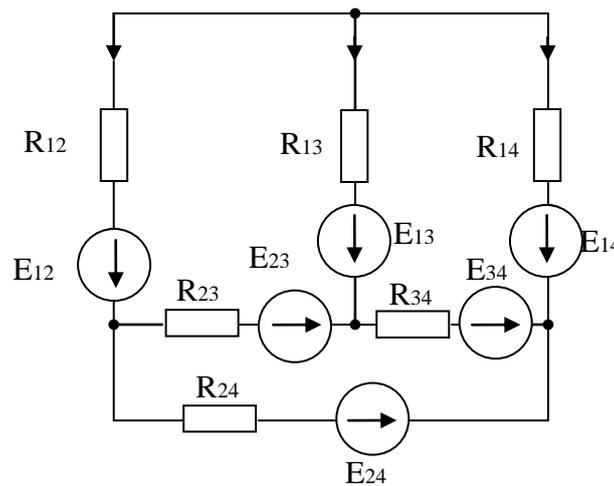


Рис. 35

**Решение:**

## 1. Узловые проводимости

$$G_{11} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{14}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10} = 0.17 \text{ См}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{24}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = 0.167 \text{ См}$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0.27 \text{ См}$$

$$G_{12} = -\frac{1}{R_{12}} = -\frac{1}{20} = -0.05 \text{ См}$$

$$G_{21} = G_{12} = -0.05 \text{ См}$$

$$G_{13} = -\frac{1}{R_{13}} = -\frac{1}{50} = -0.02 \text{ См}$$

$$G_{31} = G_{13} = -0.02 \text{ См}$$

$$G_{23} = -\frac{1}{R_{23}} = -\frac{1}{20} = -0.05 \text{ См}$$

$$G_{32} = G_{23} = -0.05 \text{ См}$$

## 2. Угловые токи

$$I(1) = -\frac{E_{12}}{R_{12}} - \frac{E_{13}}{R_{13}} - \frac{E_{14}}{R_{14}} = -\frac{100}{20} - \frac{25}{50} - \frac{30}{10} = -8.5 \text{ А}$$

$$I(2) = \frac{E_{12}}{R_{12}} - \frac{E_{23}}{R_{23}} - \frac{E_{24}}{R_{24}} = \frac{100}{20} - \frac{200}{20} - \frac{120}{15} = -13 \text{ А}$$

$$I(3) = \frac{E_{13}}{R_{13}} + \frac{E_{23}}{R_{23}} - \frac{E_{34}}{R_{34}} = \frac{25}{50} + \frac{200}{20} - \frac{180}{5} = -25.5 \text{ А}$$

## 3. Уравнения для нахождения узловых потенциалов

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I(1) \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I(2) \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I(3) \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} 0.17\varphi_1 - 0.05\varphi_2 - 0.02\varphi_3 = -8.5 \\ -0.05\varphi_1 + 0.167\varphi_2 - 0.05\varphi_3 = -13 \\ -0.02\varphi_1 - 0.05\varphi_2 + 0.27\varphi_3 = -25.5 \end{cases}$$

## 4. Узловые потенциалы

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} I(1) & G_{12} & G_{13} \\ I(2) & G_{22} & G_{23} \\ I(3) & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -8.5 & -0.05 & -0.02 \\ -13 & 0.167 & -0.05 \\ -25.5 & -0.05 & 0.27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.17 & -0.05 & -0.02 \\ -0.05 & 0.167 & -0.05 \\ -0.02 & -0.05 & 0.27 \end{vmatrix}} = -109.4256 \text{ В}$$

$$\varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & I(1) & G_{13} \\ G_{21} & I(2) & G_{23} \\ G_{31} & I(3) & G_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0.17 & -8.5 & -0.02 \\ -0.05 & -13 & -0.05 \\ -0.02 & -25.5 & 0.27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.17 & -0.05 & -0.02 \\ -0.05 & 0.167 & -0.05 \\ -0.02 & -0.05 & 0.27 \end{vmatrix}} = -149.9217 \text{ В}$$

$$\varphi_3 = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & I(1) \\ G_{21} & G_{22} & I(2) \\ G_{31} & G_{32} & I(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0.17 & -0.05 & -8.5 \\ -0.05 & 0.167 & -13 \\ -0.02 & -0.05 & -25.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.17 & -0.05 & -0.02 \\ -0.05 & 0.167 & -0.05 \\ -0.02 & -0.05 & 0.27 \end{vmatrix}} = -130.3133 \text{ В}$$

## 5. Токи в ветвях

$$I_{12} = \frac{E_{12} - U_{12}}{R_{12}} = \frac{E_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)}{R_{12}} = \frac{100 - (-149.9217 + 109.4256)}{20} = \frac{100 + 40.496}{20} = 7.024 \text{ A}$$

$$I_{13} = \frac{E_{13} - U_{13}}{R_{13}} = \frac{E_{13} - (\varphi_3 - \varphi_1)}{R_{13}} = \frac{25 - (-130.3133 + 109.4256)}{50} = 0.917 \text{ A}$$

$$I_{14} = \frac{E_{14} - U_{14}}{R_{14}} = \frac{E_{14} - (\varphi_4 - \varphi_1)}{R_{14}} = \frac{30 - (0 + 109.4256)}{10} = -7.942 \text{ A}$$

$$I_{23} = \frac{E_{23} - U_{23}}{R_{23}} = \frac{E_{23} - (\varphi_3 - \varphi_2)}{R_{23}} = \frac{200 - (-130.3133 + 149.9217)}{20} = -7.942 \text{ A}$$

$$I_{24} = \frac{E_{24} - U_{24}}{R_{24}} = \frac{E_{24} - (\varphi_4 - \varphi_2)}{R_{24}} = \frac{120 - (0 + 149.9217)}{15} = -1.995 \text{ A}$$

$$I_{34} = \frac{E_{34} - U_{34}}{R_{34}} = \frac{E_{34} - (\varphi_4 - \varphi_3)}{R_{34}} = \frac{180 - (0 + 130.3139)}{5} = 9.937 \text{ A}$$

### 6. Энергетический баланс мощностей - генерируемая мощность

$$\sum E_i I_i = E_{12} \cdot I_{12} + E_{13} \cdot I_{13} + E_{14} \cdot I_{14} + E_{23} \cdot I_{23} + E_{24} \cdot I_{24} + E_{34} \cdot I_{34} = 100 \cdot 7.024 + 25 \cdot$$

$$\cdot 0.917 + 30(-7.942) + 200 \cdot 9.019 + 120(-1.995) + 180 \cdot 9.937 = 3840.411 \text{ Вт}$$

-потребляемая мощность

$$\sum E^2_i I_i = I_{12}^2 \cdot R_{12} + I_{13}^2 \cdot R_{13} + I_{14}^2 \cdot R_{14} + I_{23}^2 \cdot R_{23} + I_{24}^2 \cdot R_{24} + I_{34}^2 \cdot R_{34} = (7.024)^2 + 20 \cdot$$

$$\cdot (0.917)^2 \cdot 50 + (-7.942)^2 \cdot 10 + (9.019)^2 \cdot 20 + (-1.995)^2 \cdot 15 + (9.937)^2 \cdot 5 = 3840.412 \text{ Вт}$$

### 3.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

Определить ток в электрической цепи (рис. 36), если  $E_1 = 40 \text{ В}$ ,  $E_2 = 20 \text{ В}$ ,  $R_{o1} = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_{o2} = 2 \text{ Ом}$ , потенциалы точек  $\varphi_1 = 80 \text{ В}$ ,  $\varphi_2 = 60 \text{ В}$ ,  $R_1 = 14 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ , Ответ:  $I = 1.6 \text{ А}$

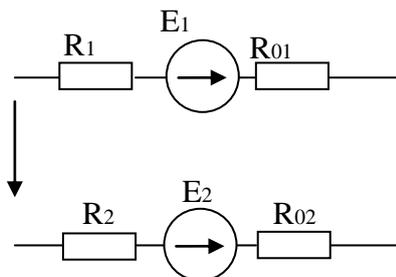


Рис. 36

#### Задача 2

Определить напряжение  $U$  на зажимах аккумулятора (рис. 37) с ЭДС  $E = 2 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $R_0 = 0.01 \Omega$ , мощность, отдаваемую нагрузочному сопротивлению  $R_H$ , при разрядке, и мощность, потребляемую им при зарядке ( $P_{зар}$ ) при токе  $I = 10 \text{ А}$ .

Ответ:  $U_{разр} = 1.9 \text{ В}$ ,  $P_{разр} = 20 \text{ Вт}$ ,  $P_{зар} = 20 \text{ Вт}$ ,  $U_{зар} = 2.1 \text{ В}$

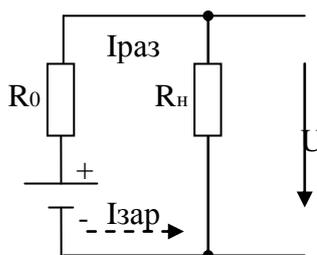


Рис. 37

### Задача 3

Составить электрическую схему источник ЭДС и схему эквивалентного ему источника тока, соединённого с нагрузочным сопротивлением  $R_H$  (рис. 38,а) при  $E = 6В$  и его  $R_0 = 0.1$  Ом. Определить ток  $J$  и проводимость  $G_0$  источника тока (рис. 38,б). Условием эквивалентности двух источников равенство напряжений в режиме холостого хода и тока в режиме короткого замыкания. Ответ:  $J = 60А$ ;  $G_0 = 10См$ .

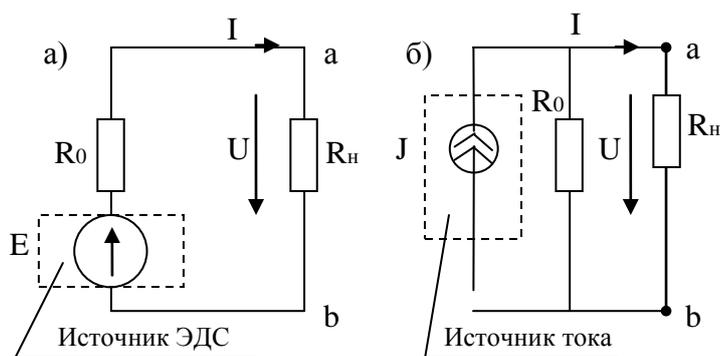


Рис. 38

### Задача 4

Определить внутреннее сопротивление  $R_0$  источника и его ЭДС  $E$  (рис. 39), если при разомкнутых выключателях  $B_1$  и  $B_2$  ток, протекающий в цепи амперметра,  $I = I_1 = 2А$ , а при замкнутом выключателе  $B_2$  ток  $I = I_2 = 2.5А$ . Сопротивление резисторов  $R_1 = R_2 = R_3 = 3$  Ом.

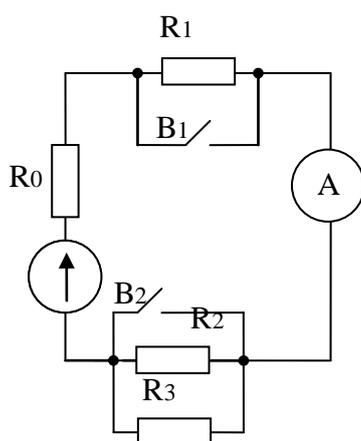


Рис. 39

Ответ:  $R_0 = 10.5$  Ом,  $E = 30В$

### Задача 5

Для электрической цепи (рис. 40) определим ток  $I$ , напряжение на зажимах потребителя  $U$  источника питания  $P_1$  и мощность  $P_2$  внешней цепи, КПД установки, если ЭДС источника питания  $E = 10B$ , его внутреннее сопротивление  $R_0 = 1$  Ом, сопротивление нагрузки  $R_H = 4$  Ом, построить внешнюю характеристику  $U(I)$  источника питания.

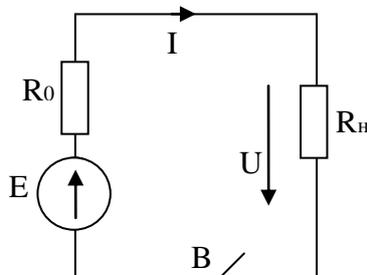


Рис. 40

Ответ:  $I = 2A$ ,  $U = 8B$ ,  $P_1 = 20Bm$ ,  $P_2 = 16Bm$ ,  $\eta = 0,8$ .

### Задача 6

Для электрической цепи постоянного тока (рис. 40) определить падение напряжения  $\Delta U_0$  внутри источника и напряжение  $U$  на его зажимах. ЭДС источника  $E = 100B$ , сопротивление  $R_0 = 1,6$  Ом, сопротивление нагрузочного резистора  $R_H = 19$  Ом. Как изменится напряжение внутри источника  $U_0'$  и напряжение на его зажимах  $U'$ , если сопротивление резистора  $R_H$  увеличивается в 2 раза?

Ответ:  $\Delta U_0 = 5B$ ,  $U = 95B$ ,  $\Delta U_0' = 2,57B$ ,  $U' = 97,43B$ .

### Задача 7

Определить напряжение  $U$  электрической цепи постоянного тока (рис. 41), а также сопротивление нагрузки  $R_H$ , если напряжение на зажимах нагрузки  $U_H = 100B$ , ток в цепи  $I = 10A$ , сопротивление каждого из проводов  $R_{\Pi} = 0,60m$ .

Ответ:  $U = 112B$ ,  $R_H = 10$  Ом.

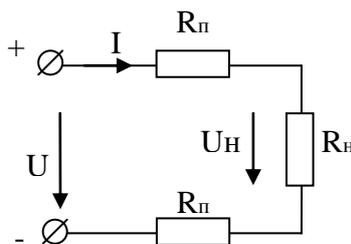


Рис. 41

### Задача 8

Определить эквивалентное сопротивление  $R_{\text{экв}}$  и ток  $I$  в электрической цепи (рис. 42), содержащий три параллельно соединенные электрические лампы. Номинальная мощность лампы 100 Вт, номинальное напряжение 100 В.

Ответ:  $R_{\text{экв}} = 33,33 \text{ Ом}$ ,  $I = 3 \text{ А}$ .

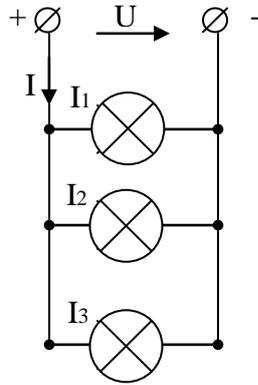


Рис. 42

### Задача 9

Для электрической цепи постоянного тока (рис. 43) определить ток  $I$  и токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_4$  в ветвях резисторов при разомкнутом и замкнутом выключателе В, а также ток  $I_{12}$  в перемычке 1-2 если к зажимам цепи подведено напряжение  $U = 240 \text{ В}$ , сопротивление резисторов  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 150 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ .

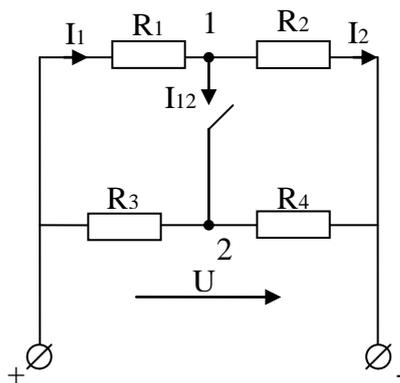


Рис. 43

Ответ: при разомкнутом выключателе В:  $I = 17,41 \text{ А}$ ,  $I_1 = I_2 = 1,41 \text{ А}$ ,  $I_3 = I_4 = 16 \text{ А}$ . При замкнутом выключателе В:  $I = 20,87 \text{ А}$ ,  $I_1 = 6,96 \text{ А}$ ,  $I_2 = 0,67 \text{ А}$ ,  $I_3 = 13,92 \text{ А}$ ,  $I_4 = 20,2 \text{ А}$ ,  $I_{12} = 6,28 \text{ А}$

### Задача 10

Для электрической цепи (рис. 44) определить токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  в ветвях, если ЭДС  $E_1 = 1.8В$ ,  $E_2 = 1.2В$ ,  $R_1 = 0.2Ом$ ,  $R_2 = 0.3Ом$ ,  $R_3 = 0.8Ом$ ,  $R_{01} = 0.6Ом$ ,  $R_{02} = 0.4Ом$ . Ответ:  $I_1 = 0.99А$ ,  $I_2 = 0.27А$ ,  $I_3 = 1.26А$ .

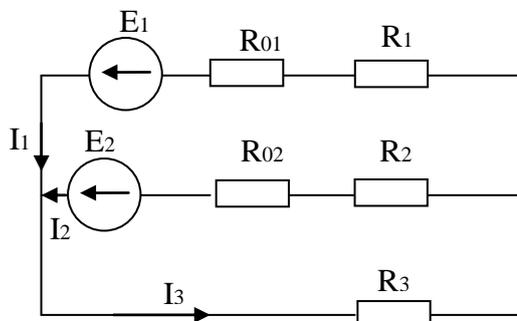


Рис. 44

Ответ:  $I_1 = 0.99А$ ,  $I_2 = 0.27А$ ,  $I_3 = 1.26А$ .

### 3.4. Краткие выводы третьей главы

1. Упорядоченное (направление) движение заряженных частиц называют электрическим током. Сила тока равна отношению заряда  $q_1$ , переносимого через поперечное сечение проводника за интервал времени, к этому интервалу.

2. Силу тока измеряют в амперах и находят по закону Ома:  $I = \frac{U}{R}$ , где  $U$  - напряжение на концах участка цепи В;  $R$  - сопротивление цепи, Ом.

3. При упорядоченном движении заряженных частиц в проводнике электрическое поле совершает работу, называемую работой тока, за время  $t$  на участке проводника равна  $A = I \cdot U \cdot t = P \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$ .

4. Количество теплоты, выделяемое в проводнике с током согласно закону Джоуля-Ленца равно  $Q = I^2 R t$ .

5. Мощность тока  $P = \frac{Q}{t} = I \cdot U = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ .

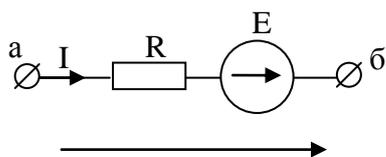
6. В проводнике должны существовать непотенциальные силы той или иной природы. Они действуют внутри источника тока, включаемого в цепь. Отношение работы сторонних сил  $A_{cm}$  при перемещении заряда  $q$  вдоль замкнутого контура к этому заряду называют электродвижущей силой  $E$ .  $E = \frac{A_{cm}}{q}$

7. Сила тока в полной цепи равна относительно ЭДС к её полному сопротивлению  $I = \frac{E}{R + R_0}$ , где  $R_0$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС.

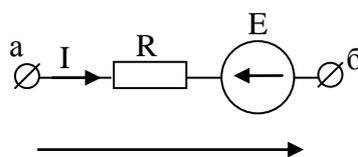
8. Сила тока в ветви электрической цепи с ЭДС равна

$$I = \frac{U_{ab} \pm E}{R}, \quad (37)$$

где  $U_{ab}$  -напряжение на концах ветви с ЭДС, В (рис. 45) и (рис. 46). Знак (+) в формуле 37 соответствует согласному направлению тока в ЭДС (рис. 45), а знак (-) противоположному направлению  $I$  и  $E$  (рис. 46). Выражение (37) представляет собой закон Ома для неоднородного участка в интегральной форме и является *обобщенным законом Ома*.



$U_{ab}$   
Рис. 45



$U_{ab}$   
Рис. 46

9. Расчёт сложных электрических цепей, содержащих несколько замкнутых контуров, каждый из которых может иметь несколько источников ЭДС или тока, производят с помощью двух законов (правил) Кирхгофа (1824-1887гг.).

**-Первый закон Кирхгофа:**

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum_{K=1}^{K=j} I_K = 0 \quad (38).$$

**-Второй закон Кирхгофа:**

В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_K$  на сопротивления  $R_K$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС  $E_i$ , встречающихся в этом контуре

$$\sum_{K=1}^{K=n} I_K R_K = \sum_{i=1}^{i=m} E_i; \quad \sum_{K=1}^{K=n} U_K = 0. \quad (39)$$

10. Коэффициент полезного действия электрической цепи (КПД источника энергии) равен

$$\eta = \frac{R_H}{R_H + R_0} \quad (40)$$

### 11. Закон Ома в *дифференциальной форме*

$$\delta = \gamma \cdot E, \quad (41)$$

где  $\delta$  - плотность тока,  $A/mm^2$ ;

$\gamma$  - удельная проводимость проводника  $\frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ ;

$E$  - напряжённость электрического поля, В/м.

## Глава 4. Электрические цепи однофазного синусоидального тока

### 4.1. Основные формулы и уравнения

Синусоидальные ЭДС в современной технике получают различными методами в электромагнитных или электронных генераторах и других устройствах. Примером является наведение ЭДС за счёт электромагнитной индукции в рамке, вращающейся в однородном магнитном поле (рис. 47). По закону электромагнитной индукции в рамке наводится ЭДС

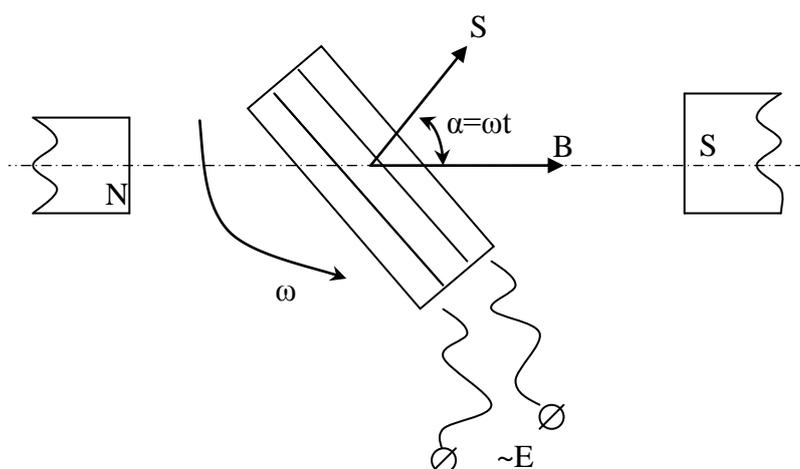


Рис. 47

$$\ell = -\frac{d\psi}{dt} = \frac{-d(w \cdot \phi_m \cdot \cos\alpha)}{dt} = -\omega B \cdot S(-\sin\alpha) = wBS \cdot \cos\omega t = E_m \cdot \sin\omega t,$$

т.е. имеем  $\ell = E_m \sin\omega t$  (42), где  $\psi$  - потокосцепление  $\psi = w \cdot \phi$ ,  $B$  - магнитная индукция,  $S$  - плотность, которая пронизывается магнитной индукцией,  $\Phi$  - магнитный поток, пронизывающий поверхность площадью  $S$ ,  $\alpha = \omega t$ , где  $\omega$  - угловая частота вращения рамки, рад/сек,  $c^{-1}$ ;  $w$  или  $W$  - число векторов рамки.

Из формулы (42) видно, что ЭДС изменяется по синусоидальному закону.

В промышленности для получения синусоидных ЭДС применяют синхронные генераторы, приводящиеся во вращение тепловыми, газовыми, гидравлическими и другими двигателями.

Значение тока, напряжения, ЭДС и других величин, в любой момент времени называется мгновенным значением этих величин и обозначаются прописными буквами  $i$ ,  $u$ ,  $e$ .

Токи, напряжения, ЭДС, мгновенные значения которые повторяются через равные промежутки времени называют периодическими, а наименьший промежуток времени, через который эти повторения наблюдаются, называют периодом  $T$ .

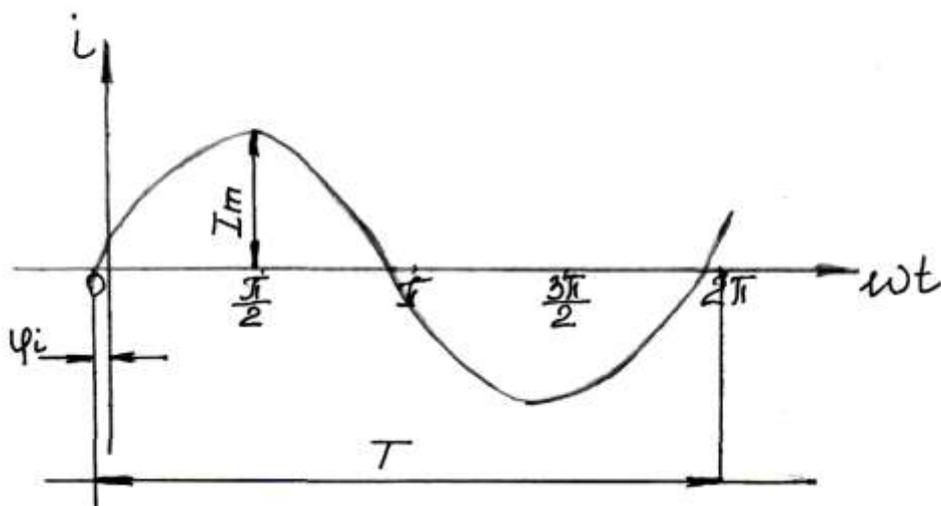


Рис. 48

Если кривая изменения периодического тока описывается синусоидой, то такой ток называется синусоидальным (рис. 48).

Если кривая отличается от *синусоидальной*, то ток *несинусоидальный*. Все синусоидальные функции времени (ток, напряжение, ЭДС, и др.) записываются в одинаковой форме:

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin (\omega t + \varphi_i); \\ u &= U_m \sin (\omega t + \varphi_u); \\ e &= E_m \sin (\omega t + \varphi_e), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $i, u, e$  – мгновенные значения тока, напряжения и ЭДС;

$I_m, U_m, E_m$  – максимальные (амплитудные) значения тока, напряжения и ЭДС.

$\omega$  – угловая частота,  $\text{с}^{-1}$ ;

$\varphi_i, \varphi_u, \varphi_e$  – начальная фаза тока, напряжения и ЭДС.

Аргументы  $(\omega t + \varphi_i)$ ,  $(\omega t + \varphi_u)$  и  $(\omega t + \varphi_e)$  называется *фазой*. Углы  $\varphi_i, \varphi_u, \varphi_e$  равные соответствующим фазам в начальный момент времени при  $t=0$  называется *начальной фазой*. Фаза  $(\omega t + \varphi)$ , с течением времени непрерывно растет. После ее увеличения на  $2\pi$  весь цикл изменения тока, напряжения, ЭДС и др. величин повторяется. В течение периода  $T$  фаза увеличивается на  $2\pi$  поэтому отношение  $2\pi/T = 2\pi f = \omega$  называют *угловой частотой*.

Величина, обратная периоду представляет собой частоту в Герцах

$$f = 1/T = \omega/2\pi \quad (44)$$

За аргумент синусоидальной функции принимают время  $t$  или угол  $\omega t$ .

Таким образом, для определения мгновенных значений тока  $i$ , напряжения и ЭДС  $e$  необходимо определить их параметры: амплитуду  $I_m, U_m, E_m$ , угловую частоту  $\omega$  и начальную фазу  $\varphi_i, \varphi_u, \varphi_e$ .

Разность двух фаз синусоидальных величин называют **фазовым углом или сдвигом по фазе** и обозначают через  $\varphi$ . Так сдвиг по фазе между напряжением и током равен

$$\varphi = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i \quad (45)$$

Кроме указанных параметров (период, частота, амплитуда, фаза, начальная фаза, сдвиг по фазе) величины характеризуются действующим и средним значениями этих величин

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m; \\ U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m; \\ E &= \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m; \\ \Phi &= \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \Phi_m. \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} I_{cp} &= \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m; \\ U_{cp} &= \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m; \\ E_{cp} &= \frac{2}{\pi} E_m = 0,637 E_m. \end{aligned} \quad (47)$$

Обычно приборы электромагнитной системы для измерения переменных токов, напряжений и ЭДС градуируют в действующих значениях.

## 4.2. Представление синусоидальных величин

*Синусоидальные функции времени могут быть представлены:*

- линейными диаграммами изменения синусоидальных величин во времени;
- вращающимися векторами;
- комплексными числами;

**Тригонометрическая форма** записи синусоидальной величины во времени в общем виде представляется выражением

$$a = A_m \sin \alpha,$$

где  $a$  - мгновенное значение синусоидальной величины во времени;

$A_m$  – амплитудное (максимальное) значение синусоидальной величины во времени;

$\alpha$  - фазовый угол (фаза) или аргумент синусоидальной функции во времени

$$\alpha = \omega t + \varphi,$$

где  $t$ - текущее значение времени;

$\omega$ - угловая (круговая) частота, характеризующая скорость изменения фазового угла;

$\varphi$ - начальная фаза (начальный фазовый угол).

Синусоидально изменяющуюся величину можно изобразить в виде *линейных диаграмм*, т. е. графика изменения соответствующей синусоидальной функции от времени (от угла  $\omega t$ ), (рис. 49).

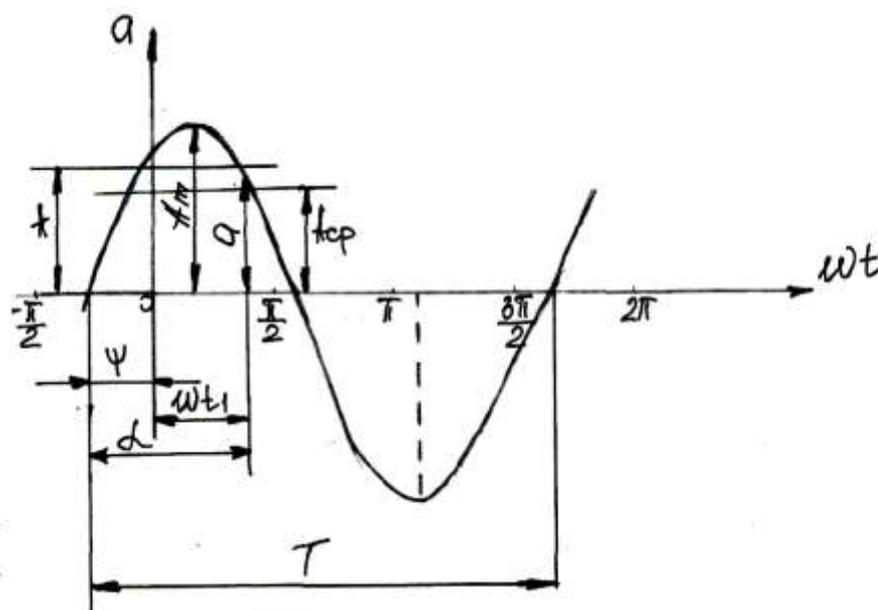


Рис. 49

$$a = A_m \sin \alpha = \sin (\omega t + \varphi)$$

$T$ - период изменения синусоидальной величины  $a = A_m \sin \alpha$ ;

$f = 1/T$  частота (число периодов в секунду) синусоидально изменяющийся величины во времени.

В электротехнике кроме мгновенных ( $a_1$ ) и максимальных ( $A_m$ ) значений используются действующие ( $A$ ) и средние ( $A_{cp}$ ) значения синусоидальных изменяющихся величин

$$A = \frac{A_m}{\sqrt{2}} = 0,707 A_m;$$

$$A_{cp} = \frac{2}{\pi} A_m = 0,637 A_m.$$

Отношение  $\frac{A}{A_{cp}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2A_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,113$  называют *коэффициентом формы*.

С помощью графического изображения в прямоугольных координатах можно находить опережающую и отстающую синусоидальные величины при этом пользоваться таким правилом

*Отстает по фазе* та из двух синусоидальных величин, которая при переходе от отрицательных значений к положительному позже (правее) пересекает ось абсцисс (рис. 50).

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{e1})$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \varphi_{e2})$$

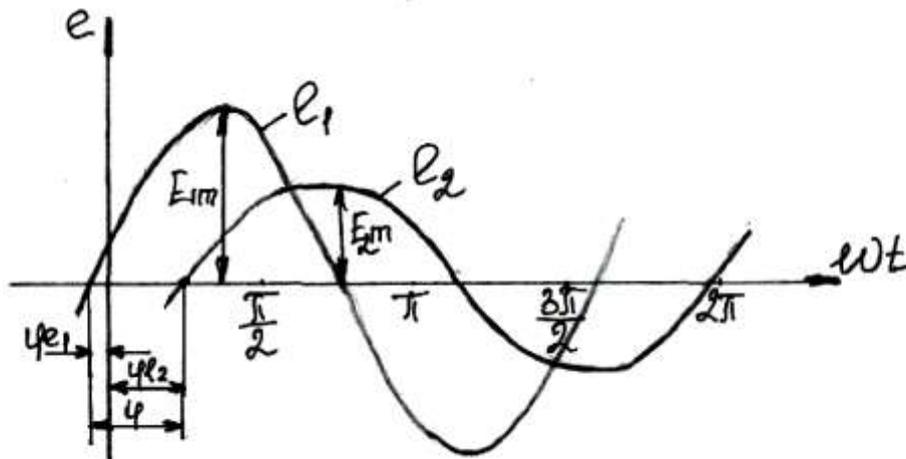


Рис. 50

Отсюда видно что ЭДС  $e_2$  отстает от ЭДС  $e_1$  на угол  $\varphi = \varphi_{e1} + \varphi_{e2}$

Угол  $\varphi$  здесь называют сдвигом фаз.

Для напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  и тока  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$  угол сдвига фаз определяют в общем случае по формуле

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (49)$$

Таким образом, если синусоидальная величина при переходе от отрицательных значений к положительным пересекает ось абсцисс левее оси ординат, то она имеет *положительную начальную фазу*, а если правее- то *отрицательную*.

Синусоидальная функция времени  $a = A_m \sin(\omega t + \varphi_a)$  может изображаться вращающимся вектором (рис. 51).

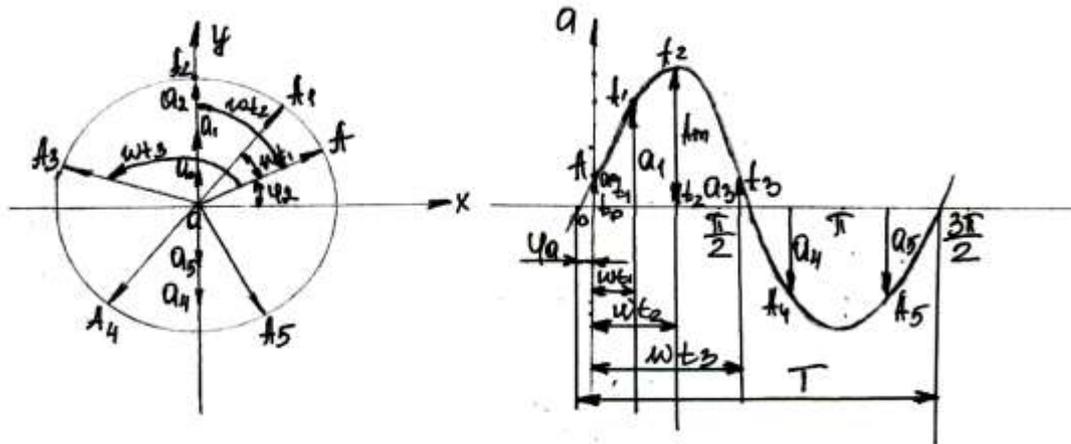


Рис. 51

Анализ цепей синусоидального тока упрощается, если использовать понятие вращающегося вектора тока, напряжения, ЭДС и др. вращающихся с постоянной угловой частотой  $\omega$ .

В прямоугольной системе координат под углом  $\varphi_a$  относительно оси OX отложим вектор  $\overline{OA}$ , величина которого в некотором масштабе равна амплитуде ЭДС  $E_m$  а полная фаза  $\omega t + \varphi_a$  в начальный момент ( $t=0$ ) равна начальной фазе  $\varphi_a$  т.е. значение ЭДС при  $t=0$  равно

$$a_0 = E_m \sin \varphi_a.$$

В последующие моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  этот вектор будет последовательно располагаться относительно оси OX под углами  $\omega t_1 + \varphi_a, \omega t_2 + \varphi_a, \omega t_3 + \varphi_a, \dots, \omega t_n + \varphi_a$ . Проекции вектора  $\overline{OA}_k$  на вертикальную ось будут равны

$$\begin{aligned} a_1 &= E_m \sin (\omega t_1 + \varphi_a) \\ a_2 &= E_m \sin (\omega t_2 + \varphi_a) \\ a_3 &= E_m \sin (\omega t_3 + \varphi_a) \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &= E_m \sin (\omega t_k + \varphi_a), \end{aligned}$$

что соответствует мгновенным значениям синусоидальной ЭДС в моменты времени  $\omega t_1, \omega t_2, \omega t_3, \dots, \omega t_n$ .

Аналогично проекции вектора  $|\overline{OA}| = E_m$  на горизонтальную ось OX в этом же моменте времени отвечают мгновенным косинусным ЭДС

$$\begin{aligned} a_1 &= E_m \cos (\omega t_1 + \varphi_a) \\ a_2 &= E_m \cos (\omega t_2 + \varphi_a) \\ a_3 &= E_m \cos (\omega t_3 + \varphi_a) \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &= E_m \cos (\omega t_k + \varphi_a) \end{aligned}$$

Для сложения двух синусоидальных ЭДС одинаковой частоты

$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{i1})$  и  $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{i2})$  достаточно геометрически сложить изображающие их вектора  $I_{m1}$   $I_{m2}$  (рис.52).

Проекция полученного при этом вектора  $I_m$  на ось ординат равна сумме мгновенных значений токов т.е.  $i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$  так как сумма проекций векторов равна  $\varphi_i = \varphi_{i1} - \varphi_{i2}$

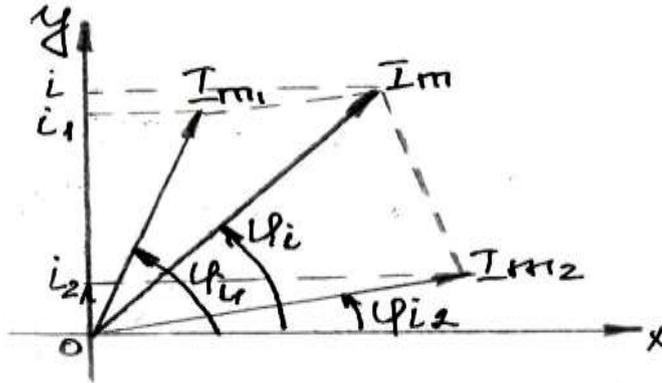


Рис. 52

*Вычитание* синусоидальных токов можно заменить сложением. При этом изображающий вычитываемый ток надо направить в противоположную сторону, что эквивалентно изменению начальной фазы этого тока на  $\pm\pi$ .

**Совокупность векторов, изображающих синусоидальные величины (ток, напряжение, ЭДС, и др.) одинаковой частоты в начальный момент времени ( $t=0$ ) называется векторной диаграммой.**

Для анализа цепей синусоидального тока достаточно знать амплитуды синусоидальных векторов и сдвиг по фазе между ними. При этом один из векторов на векторной диаграмме можно расположить произвольно, а все остальные должны быть расположены с соответствующей ориентацией относительно исходного вектора.

**В электротехнике за положительное направление вращения векторов принято направление против хода часовой стрелки.**

Синусоидальные функции времени  $a = A_m \sin(\omega t + \varphi_a)$  можно изобразить *комплексными числами*. При этом на плоскости комплексных чисел из начала координат под углом  $\varphi_a$  к оси действительных чисел (вещественной оси) проводят вектор  $\dot{A}_m$ , концу которого соответствует определенное число.

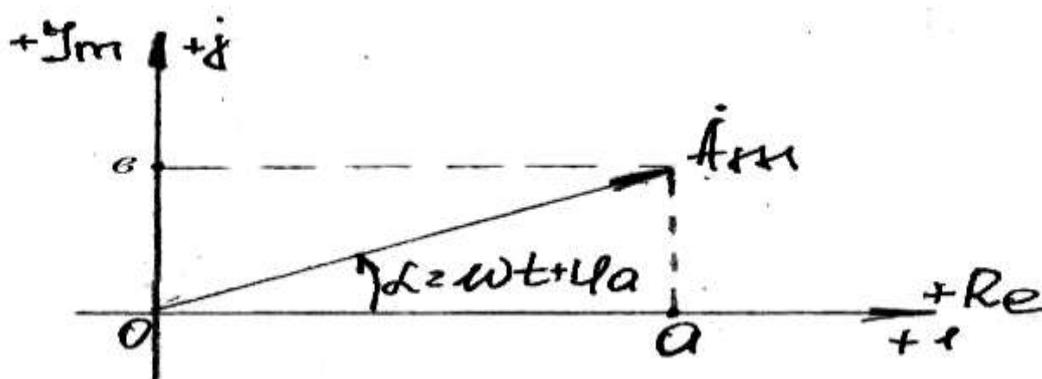


Рис. 53

Комплексная амплитуда синусоидальных величин определяется выражением

$$\dot{A}_m = a + jb = A_m \cos \alpha + jA_m \sin \alpha = A_m e^{j\alpha}, \quad (50)$$

где  $A_m = \sqrt{a^2 + b^2}$  - модуль комплексного числа;  
 $e$  - основание натурального логарифма;  
 $a$  - вещественная часть комплексного числа

$$a = A_m \cos \alpha = \operatorname{Re} A_m e^{j\alpha} \quad (51)$$

$b$  - мнимая часть комплексного числа

$$b = A_m \sin \alpha = \operatorname{Im} A_m e^{j\alpha} \quad (52)$$

$\dot{A}_m$  - комплексная амплитуда;  
 $\alpha$  - аргумент комплексного числа,  $\alpha = \operatorname{arctg} b/a$  (53)

Для действующих значений синусоидальных токов, напряжений и ЭДС выражение при  $t=0$  запишется и называют комплексами тока, напряжения и ЭДС

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I \cdot e^{j\varphi_i} \\ \dot{U} &= U \cdot e^{j\varphi_u} \\ \dot{E} &= E \cdot e^{j\varphi_e} \end{aligned} \quad (54)$$

Комплексное число представляет собой сумму действительной  $\operatorname{Re}$  и мнимой  $\operatorname{Im}$  частей. Здесь  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  символы, образующие действительную и мнимую части комплексного числа ( $\operatorname{Re} \dot{A}_m = a$ ;  $\operatorname{Im} \dot{A}_m = b$ )

В выражении комплексного числа фигурирует символ  $j = \sqrt{-1}$  - мнимая единица, с помощью которой из комплексного числа выделяется его мнимая

часть. Умножение вектора  $\dot{A}_m$  на множитель  $j$  соответствует повороту его на угол  $\pi/2$  против хода часовой стрелки от оси  $+1$ , а умножение на  $-j$  повороту его в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки от оси  $+1$ ).

Обычно используют три формы записи комплексного числа: алгебраическую, тригонометрическую, и показательную.

**Алгебраическая форма записи комплексного числа** (рис. 53)

$$\dot{A}_m = a + jb; \quad (55)$$

Сопряженное ему комплексное число  $\overset{*}{A}_m$  имеет противоположный знак для мнимой части

$$\overset{*}{A}_m = a - jb; \quad (56)$$

При этом произведение  $\overset{*}{A}_m \cdot \overset{*}{A}_m$  оказывается равным  $A_m^2$ , т.е.

$$\overset{*}{A}_m \cdot \overset{*}{A}_m = A_m^2 \quad (57)$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа более удобна при их сложении и вычитании комплексных чисел.

**Тригонометрическая форма записи комплексных чисел** является производной алгебраической формы с учетом того, что  $\cos \alpha = a/A_m$ ,  $\sin \alpha = b/A_m$ ;

$$A_m = A_m \cos \alpha + j A_m \sin \alpha \quad (58)$$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел удобна при переходе от показательной формы записи к алгебраической.

**Показательная форма записи комплексных чисел** является производной от тригонометрической с учетом того, что в соответствии с формулой Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha; \quad (59)$$

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\alpha},$$

где  $e^{j\alpha}$  - поворотный множитель, показывающий как повернут вектор  $\dot{A}_m$  относительно вещественной оси  $+1$  в положительном направлении на угол  $\alpha$ .

Поворотные множители  $j$  и  $e^{j\alpha}$  могут быть написаны в виде

$$j = \sqrt{-1};$$

$$j \cdot j = -1;$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{-1} = -j$$

$$\frac{1}{-j} = \frac{-j}{-j \cdot (-j)} = \frac{-j}{-1} = j$$

**Показательная форма записи комплексного числа** более удобна при выполнении умножения, деления, извлечения корней, логарифмирования комплексных чисел.

В табл. 1 показан переход от записи мгновенных значений синусоидальных функций к показательной тригонометрической и алгебраической формам записи комплексных чисел.

При расчетах электрических цепей переменного тока широко применяется метод комплексных чисел, позволяющий графические операции над векторами, заменить алгебраическими действиями над комплексными числами.

Мгновенное значение синусоидальной функции времени	Формы записи комплексных величин		
	показательная	тригонометрическая	алгебраическая
1. $e = E_m \sin \omega t = 84,6 \sin \omega t B$	$\dot{E} = E e^{j\varphi} = 60 e^{j\varphi} = 60 B$ здесь $\varphi=0$	$\dot{E} = E(\cos \varphi + j \sin \varphi) = 60(\cos \varphi + j \sin \varphi) = 60 B$	$\dot{E} = E' + jE'' = 60 \_ B, \_ E' = E \cos \varphi = 60 B, E'' = E \sin \varphi = 0$
2. $e = E_m \cos \omega t = E_m \sin(\omega t + \pi/2) = 84,6 \sin(\omega t + \pi/2) B$	$\dot{E} = E e^{j\frac{\pi}{2}} = 60 e^{j\frac{\pi}{2}} B$	$\dot{E} = E(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}) = 60(0 + j1) = j60 B$	$\dot{E} = E' + jE'' = j60 \_ B, \_ E' = E \cos \frac{\pi}{2} = 0 B, E'' = E \sin \frac{\pi}{2} = 60 B$
3. $e = E_m \sin(\omega t \pm \pi/6) = 84,6 \sin(\omega t \pm \pi/6) B$	$\dot{E} = E e^{\pm j\frac{\pi}{6}} = 60 e^{\pm j\frac{\pi}{6}} B$	$\dot{E} = E(\cos \frac{\pi}{6} \pm j \sin \frac{\pi}{6}) = 60(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm j \frac{1}{2}) = 30(\sqrt{3} \pm j) B$	$\dot{E} = E' + jE'' = 30(\sqrt{3} \pm j) B, E' = E \cos \frac{\pi}{6} = 30\sqrt{3} B, E'' = E \sin \frac{\pi}{6} = 30 B$
4. $e = E_m \sin(\omega t \pm 2\pi/3) = 84,6 \sin(\omega t \pm 2\pi/3) B$	$\dot{E} = E e^{\pm j\frac{2\pi}{3}} = 60 e^{\pm j\frac{2\pi}{3}} B$	$\dot{E} = E(\cos \frac{2\pi}{3} \pm j \sin \frac{2\pi}{3}) = 60(-\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}) = -30 \pm j30\sqrt{3} = (-30 \pm j51,9) B$	$\dot{E} = E' + jE'' = (-30 \pm j51,9) B, E' = E \cos \frac{2\pi}{3} = 30 B, E'' = E \sin \frac{2\pi}{3} = 51,9 B$

При использовании комплексных чисел методы расчета электрических цепей переменного тока аналогичны методам расчета электрических цепей постоянного тока.

При этом в уравнениях, записанных для электрических цепей переменного тока, токи  $\dot{I}$ . Напряжения  $\dot{U}$ , ЭДС, сопротивления  $\underline{Z}$ , проводимости  $\underline{Y}$ , мощности  $\dot{S}$ , записываются в комплексной форме.

С учетом этого математическое выражение *Закон Ома* в **комплексной форме** записывается

$$\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z}; \quad \dot{I} = \dot{U} / \underline{Y} \quad (61)$$

Математическое выражение **первого закона Кирхгофа в комплексной форме**

$$\sum_1^n \dot{I}_k = 0 \quad (62)$$

Математическое выражение **второго закона Кирхгофа в комплексной форме**

$$\sum_1^n \dot{I}_k R_k = \sum_1^m \dot{E}_k \quad (63)$$

Метод расчета синусоидального тока, основанный на изображении гармонических функции времени комплексными числами, называется **методом комплексных амплитуд**.

### 4.3. Пассивные элементы в цепях синусоидального тока

#### 4.3.1. Резистор R в цепи синусоидального тока

Если на вход цепи (рис.54) подать напряжение  $u = U \sin(\omega t + \varphi_u)$ , то через резистор R потечет ток  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

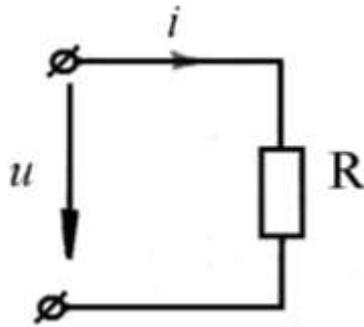


Рис. 54

Току и напряжению соответствуют комплексные амплитуды напряжения и тока  $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ ;  $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$

Для приведенной схемы отношение

$$\frac{\dot{U}_m e^{j\varphi_u}}{\dot{I}_m e^{j\varphi_i}} = \underline{z} = z e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = R, \text{ т.е. } \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0, \text{ углы } \varphi_u \text{ и } \varphi_i$$

равны между собой ( $\varphi_u = \varphi_i$ ). Отсюда следует, что вектор  $\dot{U}_m$  и  $\dot{I}_m$  сдвинуты по фазе. Векторные диаграммы и графики напряжения и тока показаны на схеме

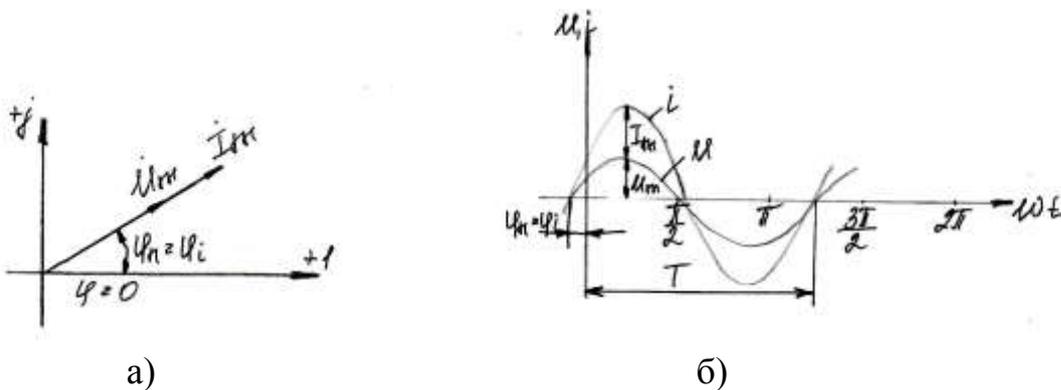


Рис. 55

#### 4.3.2. Катушка индуктивности в цепи синусоидального тока

Если к катушке индуктивности  $L$ , не имеющую активного сопротивления ( $R=0$ ) приложить напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ , то по ней потечет ток  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ , который наведет на ней ЭДС самоиндукции;

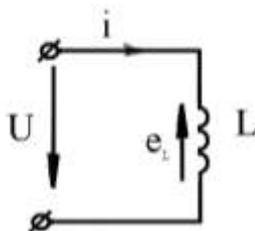


Рис. 56

$$e_L = -L \frac{di}{dt}, \quad (64)$$

которая уравновешивает приложение к ней напряженное  $u(t)$  и тогда можно записать  $u + e_L = 0$ , т.е.

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} \quad (65)$$

$$U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_m}{L} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = \int \frac{U_m}{L} \sin(\omega t + \varphi_u) dt = \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t + \varphi_u) = I_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \\ = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \pi/2) = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$\text{Имеем } i = I_m \sin(\omega t - \pi/2) \quad (66)$$

Угол сдвига фаз между напряжением и током равно

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pi/2 \quad (67)$$

т.е. ток в индуктивной катушке **отстает** от приложенного к ней напряжения по фазе на  $\pi/2$ .

Векторная диаграмма и график изменения напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$  показаны на рис. 57.

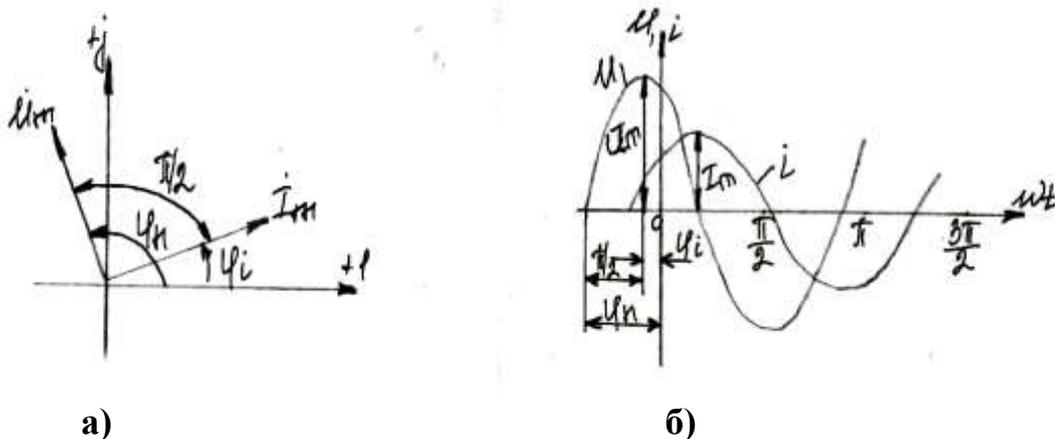


Рис. 57

Произведение  $\omega L$  обозначают через  $X_L$  и называют **индуктивным сопротивлением**.

$$X_L = \omega L = 2\pi f \quad (68)$$

Комплексное сопротивление катушки индуктивности:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\omega L I_m e^{j(\varphi_u + \pi/2)}}{I_m e^{j\varphi_i}} = j\omega L = jX_L \quad (69)$$

Комплексная проводимость индуктивного сопротивления:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -j b_L \quad (70)$$

### 4.3.3. Конденсатор емкостного $C$ в цепи синусоидального тока

Если к конденсатору емкостью приложено напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ , то через него будет протекать ток  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ .

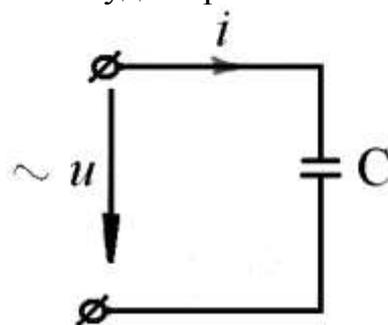


Рис. 58

Ток с другой стороны можно выразить

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = d[CU_m \sin(\omega t + \varphi_u)] = \omega C U_m (\cos \omega t + \varphi_u) = \\ &= I_m \sin(\omega t + \varphi_u + \pi/2) = I_m \sin(\omega t + \pi/2) \end{aligned} \quad (71)$$

Здесь  $\varphi_u + \pi/2 = \varphi_i$  и  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pi/2$

Окончательно имеем

$$i = I_m \sin(\omega t + \pi/2) \quad (72)$$

т.е. ток протекающий через конденсатор, **опережает** приложенное к нему напряжение по фазе на  $\pi/2$ .

Произведение  $\omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{x_c} = I_m$  представляет собой амплитудный ток, а от-

ношение  $\frac{1}{\omega C}$  называется **емкостным сопротивлением**.

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (73)$$

Комплексное сопротивление конденсатора

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{\omega C U_m e^{j(\varphi_u + \frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{j\omega C} = -jx_c = x_c e^{-j90^\circ} \quad (74)$$

Комплексная проводимость конденсатора

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{\underline{Z}} = j\omega C = jb_c \quad (75)$$

Комплексное напряжение на конденсаторе

$$\dot{U}_c = \dot{I} \cdot (-jx_c) = \dot{I} x_c e^{-j90^\circ} \quad (76)$$

Векторная диаграмма и график изменения напряжения и тока во времени на конденсаторе показаны на рис. 59:

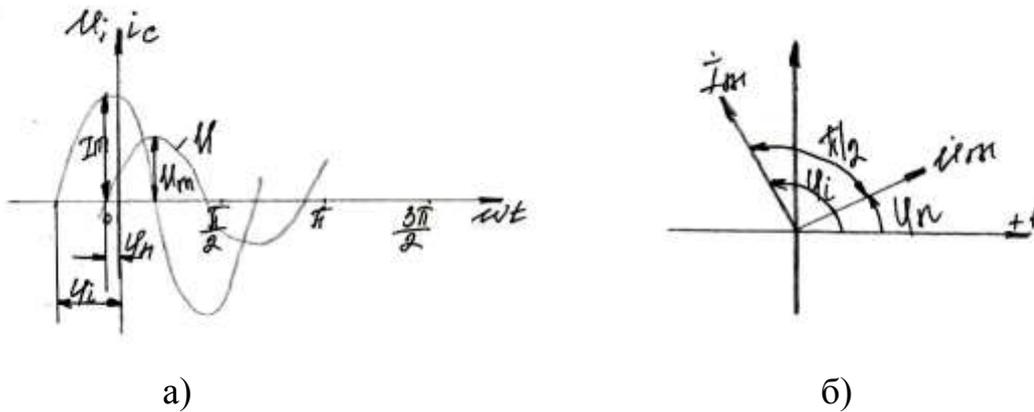


Рис. 59

#### 4.3.4. Цепь синусоидального тока с последовательным соединением R,L,C

Если на вход такой цепи (рис. 61) подать синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ , то по ней течет ток  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

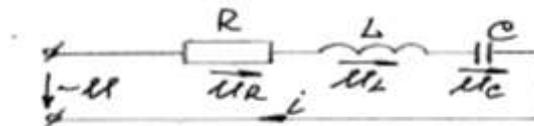


Рис. 60

Напряжение на резисторе  $U_R$  совпадает по фазе с током ( $\varphi_u = \varphi_i$ ), на индуктивности  $U_L$  ( $\varphi_{U_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$ ) опережает, а если  $U_C$  ( $\varphi_{U_C} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ ) отстает по фазе

от тока на  $\pi/2$ , поэтому по второму Закону Кирхгофа в комплексной форме можно записать **Закон Кирхгофа**:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{Rm} + \dot{U}_{Lm} + \dot{U}_{Cm} = U_{Rm} e^{j\varphi_i} + U_{Lm} e^{j(\varphi_i + \pi/2)} + \\ U_{Cm} e^{j(\varphi_i - \pi/2)} &= R \dot{I}_m e^{j\varphi_i} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\varphi_{UL}} - j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_m e^{j\varphi_C} = \dot{I}_m (R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}) = \dot{I}_m \underline{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \underline{Z} = R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C)$$

### Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad (77)$$

Реактивное сопротивление цепи

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (78)$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \quad (79)$$

Сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} \quad (80)$$

Характер поведения цепи зависит от соотношения величин индуктивного  $X_L$  и емкостного  $X_C$  сопротивлений.

а)  $X_L > X_C$ ;  $\varphi > 0$ , ток в цепи отстает от приложенного к ней напряжения (рис. 61). Цепь носит индуктивный характер.

б)  $X_L < X_C$ ;  $\varphi < 0$ , ток в цепи опережает напряжение. Цепь носит емкостный характер (рис. 62).

в)  $X_L = X_C$ ;  $\varphi = 0$ , ток совпадает с напряжением. Цепь носит характер активного сопротивления (рис. 63).

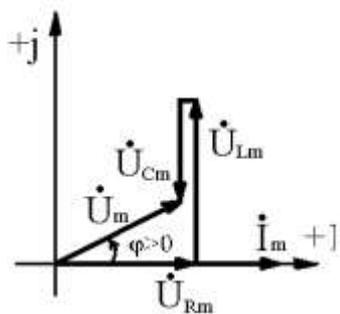


Рис. 61

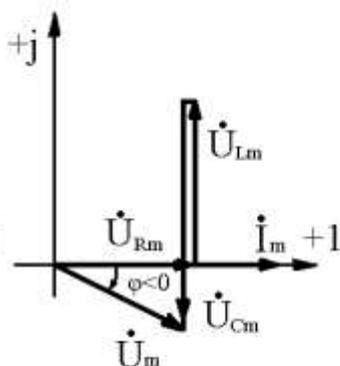


Рис. 62

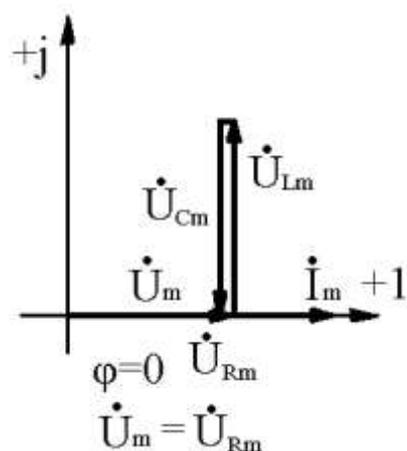


Рис. 63

При  $X_L = X_C$  или  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  в цепи наступает **резонанс напряжений**, при котором напряжение на индуктивности  $U_L$  и на емкости  $U_C$  могут превышать напряжение, подаваемые на зажимы цепи

$$\begin{cases} U_L = U \cdot \frac{X_L}{R} \\ U_C = U \cdot \frac{X_C}{R} \end{cases} \quad (81)$$

Резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (82)$$

Сопротивление индуктивности или емкости цепи при резонансе называют **волновым или характеристическим сопротивлением и обозначают  $\rho$**

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (83)$$

**Добротность контура  $D$**

$$D = \frac{\omega_p \cdot L}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{U_{LP}}{U} = \frac{U_{CP}}{U} \quad (84)$$

Добротность контура определяет эффективность или качество контура и достигает в равнотехнике  $D=200-300$

Здесь  $U_{LP} = U_{CP}$  – напряжение на индуктивности и емкости при резонансе напряжений в цепи.

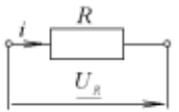
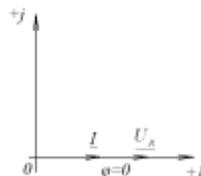
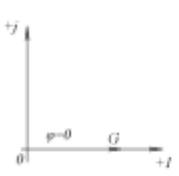
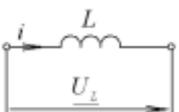
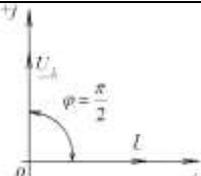
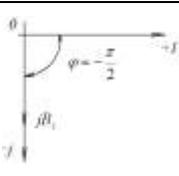
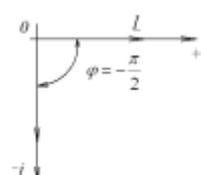
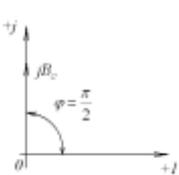
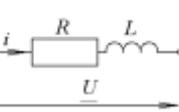
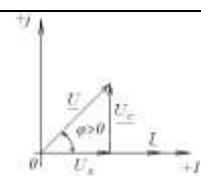
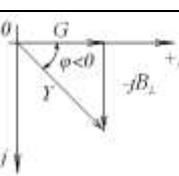
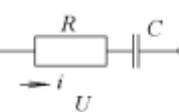
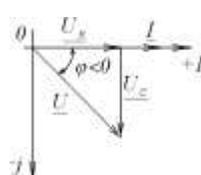
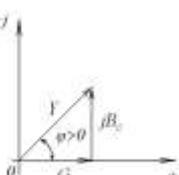
Последовательный контур широко применяется в различных электротехнических схемах и устройствах в качестве резонансной системы, т.е.

системы усиливающей в  $D$  раз гармонические колебания, поступающие на ее вход.

Кроме этого, этот контур используется для селекции (разделения) сигналов по частоте.

Основные обозначения и соотношения в цепях переменного тока приведены в табл. 2.

### Основные обозначения и соотношения в цепях переменного тока

Элементы цепи	Условное изображение на схеме	Сопротивление, Ом	Комплексное сопротивление, Ом	Проводимость, см	Комплексная проводимость, см	Угол сдвига фаз между $I$ и $U$ , рад	Комплексная мощность $\underline{S} = P + jQ = P + j(Q_L - Q_C)$	Векторные диаграммы на плоскости комплексных чисел	
								Тока и напряжения	проводимостей
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Резистор		$R$	$\underline{Z} = R$	$G = \frac{1}{R}$	$\underline{Y} = \frac{1}{R} = G$	$\varphi = 0$	$\underline{S} = P = I^2 Z = I^2 R$ $Q_L = 0; Q_C = 0$		
Катушка индуктивности		$X_L = \omega L = 2\pi f L$	$\underline{Z} = jX_L = j\omega L = X_L e^{j\pi/2}$	$B_L = \frac{1}{\omega L}$	$\underline{Y} = -jB_L$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\underline{S} = jQ_L = I^2 jX_L$ $P = 0; Q_C = 0$		
Конденсатор		$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$	$\underline{Z}_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = X_C e^{-j\pi/2}$	$B_C = \omega C$	$\underline{Y} = jB_C$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\underline{S} = -jQ_C = -I^2 jX_C$ $P = 0; Q_C = 0$		
Резистор и катушка индуктивности		$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\underline{Z} = R + jX_L = Ze^{j\varphi}$	$G = \frac{R}{R^2 + X_L^2}$	$\underline{Y} = G - jB_L$	$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$	$\underline{S} = P + jQ = I^2(R + jX_L) = I^2 Z = U I^*$ $Q_C = 0$		
Резистор и конденсатор		$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\underline{Z} = R - jX_C = Ze^{-j\varphi}$	$G = \frac{R}{R^2 + X_C^2}$ $B_C = \frac{X_C}{R^2 + X_C^2}$ $Y = \sqrt{G^2 + B_C^2}$	$\underline{Y} = G + jB_C$	$\varphi = \arctg \frac{X_C}{R}$ $\varphi = \arctg \frac{B_C}{G}$	$\underline{S} = P - jQ_C = I^2 Z = U I^*$ $Q_L = 0$		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Резистор, катушка индуктивности и конденсатор		$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = Ze^{j\varphi}$	$G = \frac{R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ $B_L = \frac{X_L}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ $B_C = \frac{X_C}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\underline{Y} = G - j(B_L - B_C)$	$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ $\varphi = \arctg \frac{B_C - B_L}{G}$	$\underline{S} = P + j(Q_L - Q_C) = I^2 \underline{Z} = \underline{U} \underline{I}^*$		
Резистор и катушка индуктивности		$Z = \frac{1}{Y}$	$\underline{Z} = \frac{RjX_L}{R + jX_L}$	$Y = \frac{1}{Z}$	$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{R + jX_L}{RjX_L} = G - jB_L$	$\varphi = \arctg \frac{I_2}{I_1}$	$\underline{S} = I^2 \underline{Z} = \underline{U} \underline{I}^*$ $P = I^2 R$ $\underline{Q}_L = U^2 jB_L$		
Резистор и конденсатор		$Z = \frac{1}{Y}$	$\underline{Z} = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$	$Y = \frac{1}{Z}$	$\underline{Y} = \frac{R - jX_C}{R(-jX_C)} = G + jB_C$	$-\varphi = \arctg \frac{I_2}{I_1}$ $\varphi = -\arctg \frac{I_2}{I_1}$	$\underline{S} = I^2 \underline{Z} = \underline{U} \underline{I}^*$ $P = I^2 R$ $\underline{Q}_C = -U^2 jB_C$		
Катушка индуктивности и конденсатор		$Z = \frac{1}{Y}$	$\underline{Z} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C}$	$Y = \frac{1}{Z}$		$\varphi = \frac{\pi}{2}$ при $I_2 < I_1$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ при $I_2 > I_1$ $\varphi = 0$ при $I_2 = I_1$	$\underline{S} = I^2 \underline{Z} = \underline{U} \underline{I}^*$ $\underline{Q}_L = U^2 jB_L$ $\underline{Q}_C = -U^2 jB_C$		

## 4.4. Мощность в цепи синусоидального тока

### 4.4.1. Мгновенная мощность

Мгновенной мощностью  $p(t)$  называют произведение приложенного к цепи мгновенного напряжения  $u(t)$  на мгновенное значение протекающего по ней тока  $i(t)$ .

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin \omega t * I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} [\cos(\omega t - (\omega t - \varphi)) - \cos(\omega t + (\omega t - \varphi))] = UI(\cos \varphi - \cos 2\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)$$

Отсюда

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (85)$$

Мгновенная мощность в цепи синусоидального тока имеет постоянную и переменную составляющие, которая изменяется во времени с удвоенной частотой.

Характер изменения мгновенной мощности зависит от разности фаз между напряжением и током (рис. 64).

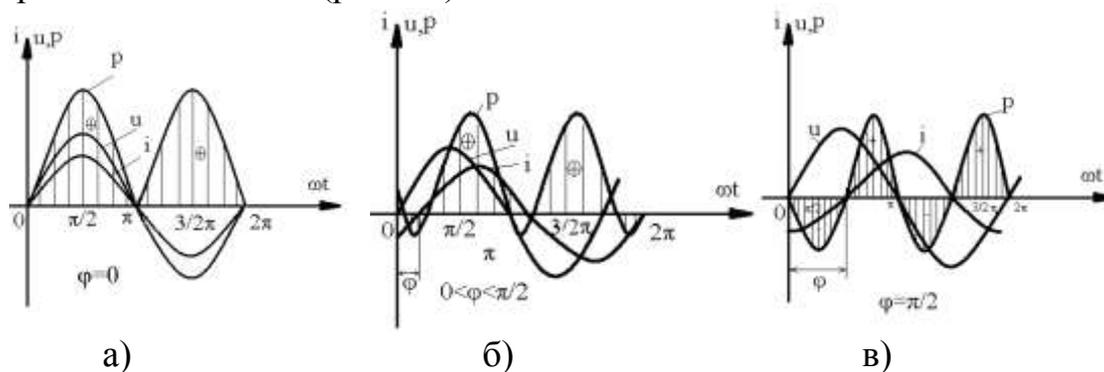


Рис. 64

### 4.4.2. Активная мощность – P

Это *среднее* значение мгновенной мощности  $p(t)$  за период  $T$ , т.е.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)] dt = UI \cos \varphi \quad (86)$$

Активная мощность выражает энергию, которая передается от источника к нагрузке и измеряется в ваттах (Вт).

Множитель  $\cos \varphi$  называется *коэффициентом мощности*.

Для активной нагрузки  $\cos \varphi = 1$  и

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} = gU^2 \quad (87)$$

#### 4.4.3. Реактивная мощность-Q

Она характеризует энергию, которая периодически циркулирует между источником и нагрузкой. Это бывает возможно в том случае, если в нагрузке есть идеальные элементы L и C, способные накапливать энергию тока источника и возвращать ее источнику

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = UI \cdot \sin \varphi \\ \text{или} \quad Q = X_i I^2 = Z \sin \varphi \cdot I^2 = UI \sin \varphi \end{array} \right. \quad (88)$$

Реактивная мощность измеряется в вольт-амперах реактивных (вар).

#### 4.4.4. Полная мощность-S

Это максимальное значение мощности

$$S = UI = I^2 \cdot Z = \frac{I^2}{Y}, \quad (89)$$

где Z – полное сопротивление цепи;  
Y – полная проводимость цепи,

$$Y = \frac{I}{Z}$$

Полную мощность можно определить из выражения  
 $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$  и измеряется в вольт-амперах (В.А)

#### 4.4.5. Комплексная мощность

Эта мощность записывается

$$\dot{S} = P + jQ = UI \cos \varphi + UI \sin \varphi = S \cos \varphi + j \sin \varphi = S e^{j\varphi}, \quad (90)$$

где  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{Q}{P}$ ;  $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}$

Модуль комплексной мощности  $\dot{S}$  является полной мощностью S.

#### 4.4.6. Баланс мощностей в цепи синусоидального тока

Если в цепи синусоидального тока несколько ( $m$ ) источников и несколько ( $n$ ) потребителей (нагрузки), то

$$\sum_{j=1}^m (S_u)_i = \sum_{K=1}^n (S_H)_k, \quad (91)$$

где  $S_U$  – значение полной мощности всех источников энергии

$$\sum_{i=1}^m (S_U)_i = \sum_{i=1}^m (P_U + jQ_U)_i, \quad (92)$$

где  $P_U$  – активная суммарная мощность источников энергии Вт;  
 $Q_U$  – реактивная суммарная мощность источников энергии, вар.;

$\sum_{K=1}^n (S_H)_K$  - значение полной мощности всех потребителей.

$$\sum_{K=1}^n (S_H)_K = \sum_{K=1}^n (P_H + jQ_H)_K, \quad (93)$$

где  $P_H$  – активная суммарная мощность всех приемников, Вт;

$Q_H$  – реактивная суммарная мощность всех потребителей энергии, вар.

Равенство (91) справедливо при условии, что равны друг другу суммы вещественных и мнимых комплексных мощностей источников и потребителей энергии, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m (P_u)_i = \sum_{K=1}^n (P_H)_K \\ \sum_{i=1}^m (Q_u)_i = \sum_{K=1}^n (Q_H)_K \end{array} \right. \quad (94)$$

Таким образом, в цепи синусоидального тока с несколькими ( $m$ ) источниками энергии и с несколькими ( $n$ ) потребителями баланс мощностей выполняется при условии, что порознь равны друг другу активные суммарные и реактивные мощности всех источников и потребителей, т.е. при условии, что  $Q_U=Q_H$ .

#### 4.5. Условия передачи максимальной активной мощности в нагрузку

Рассмотрим цепь синусоидального тока, состоящего из источника ЭДС  $E$  с внутренним сопротивлением  $Z_0 = R_0 + jX_0$  и нагрузке  $Z_H = R_H + jX_H$  (рис. 66), тогда действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{(R_0 + R_H)^2 + (x_0 + x_H)^2}} \quad (95)$$

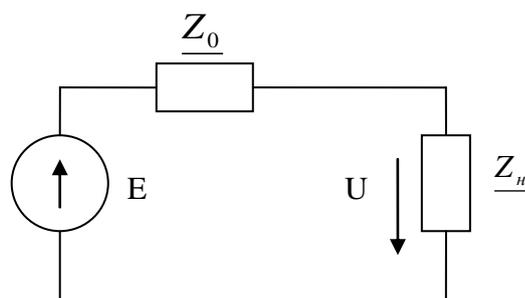


Рис. 65

Активная мощность в нагрузке

$$P_H = I^2 R_H = R_H \cdot \frac{E^2}{(R_0 + R_H)^2 + (x_0 + x_H)^2} \quad (96)$$

**Первым условием** передачи максимальной активной мощности в нагрузку является равенство по величине и противоположность знаков реактивных сопротивлений источник и нагрузки, т.е.

$$X_H = -X_0 \quad (97)$$

Из (96) при  $X_H = -X_0$  получим

$$P_H = R_H \frac{E^2}{(R_H + R_0)^2} \quad (98)$$

Максимум этой функции найдем, взяв ее производную по  $R_H$  и приравняв эту производную к нулю. Тогда получаем **второе условие**

$$R_H = R_0, \quad (99)$$

т.е. активное сопротивление нагрузки должно быть равно активному сопротивлению источника.

Тогда получаем

$$P_{H \max} = \frac{E^2}{4R_0} \quad (100)$$

КПД источника энергии составляет

$$\eta = \frac{P_n}{P_n + P_o} = I^2 \cdot \frac{R_H}{(R_H + R_0) \cdot I^2} = 0,5 \quad (101)$$

В этом случае имеем *согласованный режим цепи и нагрузки* ( $R_H=R_0$ )

*Таким образом, для получения максимальной мощности на нагрузке при заданных параметрах источника необходимо, чтобы сопротивление нагрузки было комплексно сопряженным с внутренним сопротивлением источника ( $R_H=R_U, X_H=-X_U$ ).*

#### 4.6. Типовые задачи с решениями

##### Задача 1

Для синусоидального тока напряжения (рис. 66) записать выражения для мгновенных их значений. Определить период  $T$  и время  $t_0$ , соответствующее начальной фазе тока  $\varphi_i$ , а также мгновенные значения напряжений  $U_1$  и  $U_2$  для моментов времени  $t_1=0,00167$ с. и  $t_2=0,005$  с., если частота тока 50 Гц.

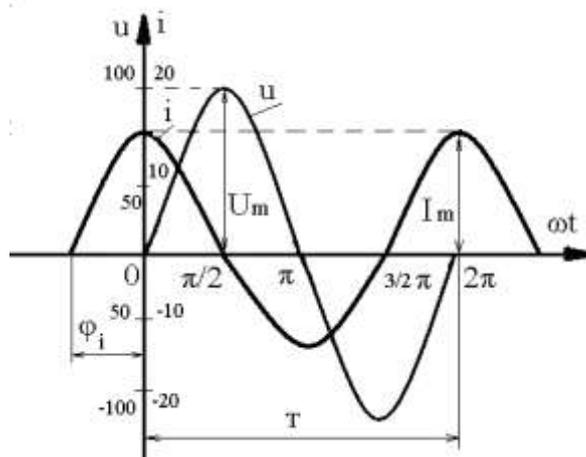


Рис. 66

**Решение:**

1. Мгновенные значения тока и напряжения в общем виде

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Для нашего случая из рис. 66 имеем  $U_m=100$  В;  $\varphi_u=0$ ;  $I_m=15$  А и  $\varphi_i=\pi/2$  ( $90^\circ$ )

Тогда имеем  $u=100\sin\omega t$  В

$$I=15\sin(\omega t+ \pi/2) \text{ А}$$

2. Период переменного напряжения  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02\text{с}$ .

3. Время, соответствующее начальной фазе тока

$$t_0 = \frac{\varphi_i}{\omega} = \frac{\pi / 2}{2\pi \cdot f} = \frac{\pi / 2}{2\pi \cdot 1/T} = \frac{T}{4} = \frac{0,02}{4} = 0,005\text{с}$$

4. Значение напряжений в момент времени  $t_1$  и  $t_2$

$$u_1 = Um \cdot \sin(\omega t_1 + \varphi_u) = 100 \cdot \sin(314 \cdot 0,00167 + 0^0) = 100 \cdot \sin(0,5248) = 100 \cdot \sin(30^0) = 50\text{В}$$

$$u_2 = Um \cdot \sin(\omega t_2 + \varphi_u) = 100 \cdot \sin(314 \cdot 0,005) = 100 \cdot \sin 90^0 = 100\text{В}$$

### Задача 2

Представить комплексный ток  $\dot{I}=4+j3$  А в тригонометрической и показательной формах записи.

#### Решение:

1. Действующее значение тока (модуль комплексного тока)

$$I = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{А}$$

2. Аргумент комплексного тока  $\varphi_i$

$$\text{tg } \varphi_i = 3/4 = 0,75 \text{ отсюда, } \varphi_i = 37^0$$

3. Тригонометрическая форма записи комплексного тока

$$I = I(\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i) = 5(\cos 37^0 + j \sin 37^0)\text{А}$$

4. Показательная форма записи комплексного тока

$$I = Ie^{j\varphi_i} = 5e^{j37^0} \text{ А}$$

### Задача 3

Записать выражение для комплексной амплитуды тока  $\dot{I}_m$ , исходя из выражения для мгновенного его значения  $i=10\sin(\omega t+30^0)$ .

#### Решение:

1. Амплитудное значение тока  $I_m=10\text{А}$

2. Начальная фаза тока  $\varphi_i = 30^0$

3. Комплексная амплитуда тока

4. Комплексная амплитуда тока в алгебраической форме

$$\dot{I}_m = 10(\cos 30^0 + j \sin 30^0) = 8,66 + j5\text{А}$$

### Задача 4

На комплексной плоскости приведена векторная диаграмма тока  $I_1=I_2=10A$  и напряжения  $U=100V$

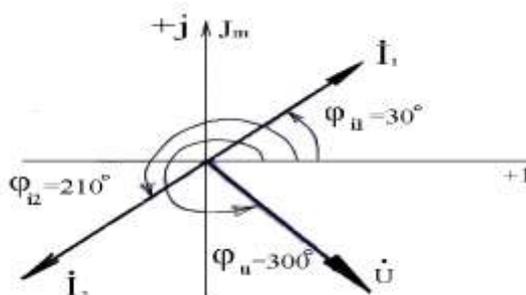


Рис. 67

Представить в алгебраической форме записи комплексных токов и напряжения, если  $\text{Re } \dot{I}_2 = 10 \cos 30^\circ = 8,66A$

$$\text{Im } \dot{I}_1 = 10 \sin 30^\circ = 5A$$

$$\text{Re } \dot{I}_2 = 10 \cos 210^\circ = -8,66A$$

$$\text{Im } \dot{I}_2 = 10 \cdot \sin 210^\circ = -5A$$

$$\text{Re } \dot{U} = 100 \cos 300^\circ = 50V$$

$$\text{Im } \dot{U} = 100 \sin 300^\circ = -86,6V$$

Алгебраическая форма записи токов  $\dot{I}_1$ ;  $\dot{I}_2$  и напряжения  $\dot{U}$

$$\dot{I}_1 = (8,66 + j5)A$$

$$\dot{I}_2 = (-8,66 - j5)A$$

$$\dot{U} = 50 - j86,6V$$

### Задача 5

На плоскости комплексных чисел заданы комплексные напряжение  $\dot{U}$  и токи  $\dot{I}_1$   $\dot{I}_2$   $\dot{I}_3$  электрической цепи. Представить их в алгебраической и показательной формах записи, если  $\varphi_u = 45^\circ$ ;  $\varphi_{i1} = 90^\circ$ ;  $\varphi_{i2} = 180^\circ$ ;  $\varphi_{i3} = 315^\circ$

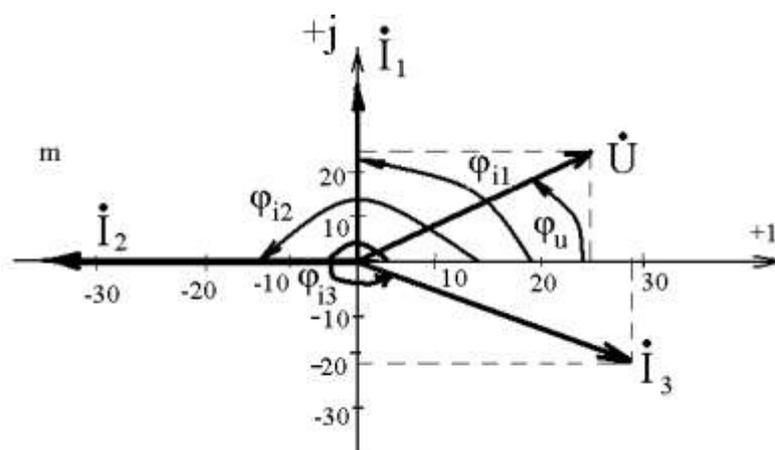


Рис. 68

**Решении:**

1. Выражения для напряжения и токов в алгебраической форме запишется

$$\dot{U} = \operatorname{Re} U e^{j\varphi} = U e^{j\varphi} + j m U e^{j\varphi} = U \cdot \cos 45^\circ + j U \sin 45^\circ = (25 + j25) \text{ В}$$

$$I_1 = \operatorname{Re} I_1 e^{j\varphi_1} + j m I_1 e^{j\varphi_1} = I_1 \cos 90^\circ + j I_1 \sin 90^\circ = 0 + j35 = j35 = 35 e^{j90^\circ} \text{ А}$$

$$I_2 = \operatorname{Re} I_2 e^{j\varphi_2} + j m I_2 e^{j\varphi_2} = I_2 \cdot \cos 180^\circ + j I_2 \cdot \sin 180^\circ = -35 \text{ А}$$

$$I_3 = \operatorname{Re} I_3 e^{j\varphi_3} + j m I_3 e^{j\varphi_3} = I_3 \cdot \cos \varphi_{i3} + j I_3 \cdot \sin \varphi_{i3} = 28,2 - j28,2 \text{ А}$$

**Задача 6**

Для электрической схемы определить ток в цепи напряжения их отдельных элементах цепи, активную, реактивную и полную мощности, построить векторную диаграмму тока и напряжений, если  $R=10 \text{ Ом}$ ,  $L=50,955 \text{ мГц}$ ,  $C=35,031 \text{ мкФ}$  и  $u=282\sin(\omega t - \pi/6) \text{ В}$ .

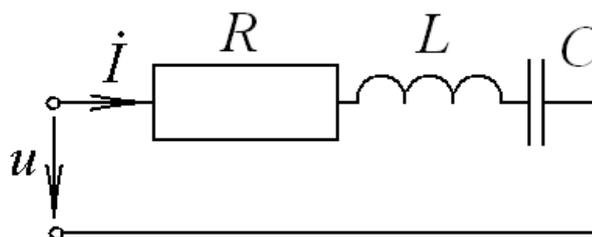


Рис. 69

**Решение:**

1. Реактивные сопротивления цепи

$$X_L = 2\pi f \cdot L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 50,955 \cdot 10^{-3} = 16 \text{ Ом}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 35,031 \cdot 10^{-6}} = 11 \text{ Ом}$$

2. Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 10 + j(16 - 11) = 10 + j5 = 11,18e^{j26,6} \text{ Ом}$$

3. Комплекс напряжения цепи

$$\dot{U} = \frac{280}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30^\circ} = 200e^{-j30^\circ} = 173,2 - j100 \text{ В}$$

4. Комплекс тока в цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{200e^{-j30^\circ}}{11,18e^{j26,6^\circ}} = 17,89e^{-j56,6^\circ} = (9,85 - j14,93) \text{ А}$$

5. Комплекс напряжений на отдельных элементах цепи

$$\dot{U}_R = \dot{I} R = 17,89e^{-j56,6^\circ} \cdot 10 = 178e^{-j56,6^\circ} = (98,48 - j149,35) \text{ В}$$

$$\dot{U}_L = \dot{I}^* jX_L = 17,89e^{-56,6^\circ} \cdot 16e^{j90^\circ} = 286,21e^{j33,4^\circ} = (238,97 + j157,7) \text{ В}$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}(-jX_C) = 17,89e^{-j56,6^\circ} \cdot 11e^{-j90^\circ} = 196,8e^{-j146,6^\circ} = (-164,3 - j108,33) \text{ В}$$

6. Комплекс мощности цепи

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 200e^{j30^\circ} \cdot 17,89e^{j56,6^\circ} = 3578e^{j26,6^\circ} = 3199,3 + j1602,1 \text{ В} \cdot \text{А}$$

Отсюда имеем

$$P = 3191,3 \text{ Вт}$$

$$Q = 1602,1 \text{ Вар}$$

$$S = 3578 \text{ ВА}$$

7. Коэффициент мощности цепи

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{3191,3}{3578} = 0,89$$

8. Векторная диаграмма тока и напряжения приведена на рис. 69, а временная диаграмма на рис. 70.

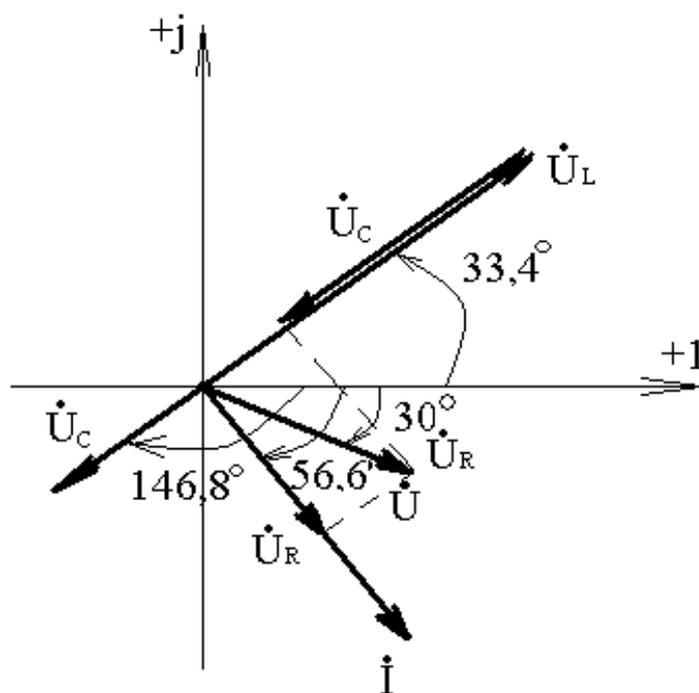


Рис. 70

$$m_u = \frac{5B}{\text{мм}}; m_i = \frac{0.4A}{\text{мм}}$$

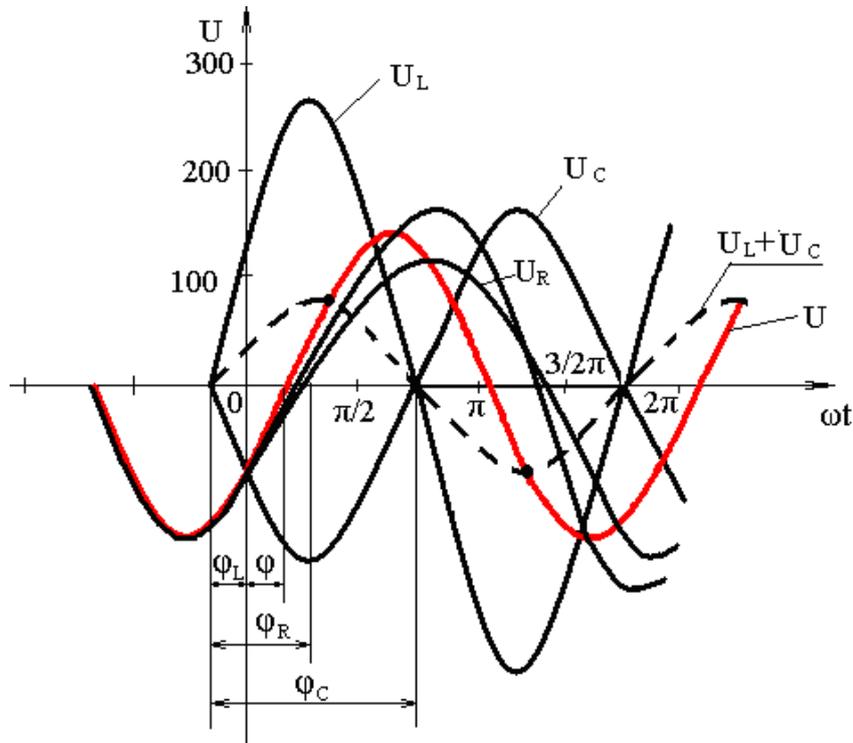


Рис. 71

### Задача 7

Рассчитать электрическую цепь (рис. 72) при синусоидальных токах частотой 50 Гц, если известно:

$$R_1 = 6 \text{ Ом}$$

$$L_1 = 25,48 \text{ мГн} = 25,48 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$E_2 = 120 \text{ В}$$

$$L_2 = 85,99 \text{ мГн} = 85,99 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$C_2 = 187,336 \text{ мкФ} = 187,336 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$C_3 = 159,235 \text{ мкФ} = 159,235 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

Составить энергетический баланс мощностей

Построить топографическую диаграмму напряжений и токов

Расчетная схема

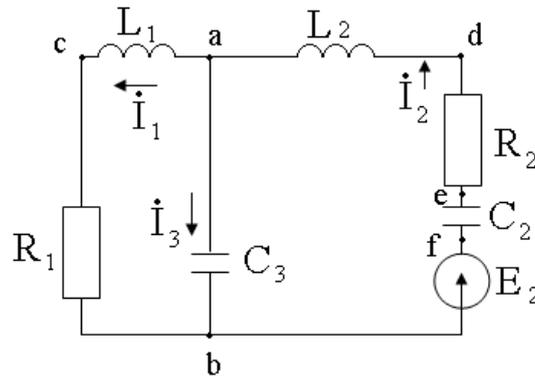


Рис. 72

**Решение:**

I. Рассчитываем электрическую цепь при синусоидальных токах частотой 50 Гц методом двух узлов

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\sum \dot{E}_i \cdot \underline{Y}_i}{\sum \underline{Y}_i} = \frac{\dot{E}_2 \cdot \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

1. Комплексы проводимостей и сопротивлений ветвей цепи:  
- для первой ветви

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = R_1 + j\omega L_1$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 25,48 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_1 = 6 + j8 = 10 \cdot e^{j53} \text{ Ом}$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{10 \cdot e^{j53}} = 0,1 \cdot e^{-j53} = (0,06 - j0,08) \text{ См}$$

- для второй ветви

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j(X_{L2} - X_{C2}) = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 2\pi f \cdot 85,99 \cdot 10^{-3} = 314 \cdot 85,99 \cdot 10^{-3} = 27 \text{ Ом}$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{2\pi f \cdot C_2} = \frac{1}{314 \cdot 187,336 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{314 \cdot 187,336} = \frac{10^6}{58823,504} = 17,08 \text{ Ом}$$

$$(X_{L2} - X_{C2}) = (27 - 17) = 10 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_2 = 10 + j10 = 14,142 \cdot e^{j45};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{14,14 e^{j45}} = 0,0707 e^{-j45} = (0,05 - j0,05) \text{ См}$$

-для третьей ветви

$$\underline{Z}_3 = -jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{314 \cdot 159,235 \cdot 10^{-6}} = j \frac{-10^6}{49999,79} = -j20 = 20 \cdot e^{-j90} \text{ Ом}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{20 \cdot e^{-j90}} = 0,05 \cdot e^{j90} = j0,05 \text{ См}$$

## 2. Комплекс напряжения между узлами а и б

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \frac{E_2 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{120 \cdot 0,0707 \cdot e^{-45}}{0,1 \cdot e^{-j53} + 0,0707 \cdot e^{-j45} + 0,05 \cdot e^{j90}} = \\ &= \frac{8,484 \cdot e^{-j45}}{0,06018 - j0,0798 + 0,0499 - j0,0499 + j0,05} = \frac{8,484 \cdot e^{-j45}}{0,11008 - j0,0797} = \frac{8,484 \cdot e^{-j45}}{0,1359 \cdot e^{-j35,9}} = 62,428 \cdot e^{-j9,1} = \\ &= (61,64 - j9,87) \text{ В} \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{ab} = 62,428 \cdot e^{j9,1} = (61,64 - j9,87) \text{ В}$$

## 3. Найдем все токи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_1} = \frac{62,428 \cdot e^{-j9,1}}{10 \cdot e^{j53}} = 6,242 \cdot e^{-j62,1} = (2,9208 - j5,5165) \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{120 - (61,642 - j9,873)}{14,142 \cdot e^{j45}} = \frac{58,358 + j9,873}{14,142 \cdot e^{j45}} = \frac{59,18 \cdot e^{j9,6}}{14,142 \cdot e^{-j45}} = 4,184 \cdot e^{-j34,4} = \\ &= (3,410 - j2,4237) \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{62,428 \cdot e^{-j9,1}}{20 \cdot e^{-j90}} = 3,12 \cdot e^{j80,9} = (0,493 + j3,081) \text{ А}$$

Проверка.  $\dot{I}_1 + \dot{I}_3 = \dot{I}_2$

$$(2,9208 - j5,5165) + (0,493 + j3,081) = 2,413 - j2,4355,$$

т.е. токи найдены правильно

## 5. Найдем напряжение на каждом элементе участков цепи

$$\dot{U}_{R1} = R_1 \cdot \dot{I}_1 = 6 \cdot 6,242 \cdot e^{-j62,1} = (17,52 - j33,1) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{L1} = \dot{I}_1 \cdot jX_{L1} = 6,242 \cdot e^{-j62,1} \cdot 8 \cdot e^{-j90} = 49,936 \cdot e^{j27,9} = (44,13 + j23,37) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{R2} = R_2 \cdot \dot{I}_2 = 10 \cdot 4,184 \cdot e^{-j35,4} = 41,84 \cdot e^{-j35,4} = (34,1 - j24,24) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2 \cdot (-jX_{C2}) = 4,184 \cdot e^{-j35,4} \cdot 17 \cdot e^{-j90} = 71,128 \cdot e^{j125,4} = (-40,72 - j58,08) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{L2} = \dot{I}_2 \cdot jX_{L2} = 4,184 \cdot e^{-j35,4} \cdot 27 \cdot e^{0} = 112,968 \cdot e^{j54,6} = (65,44 + j92,08) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{C3} = \dot{U}_{ab} = \dot{I}_3 \cdot (-jX_{C3}) = 3,12 \cdot e^{j80,9} \cdot 20 \cdot e^{-j90} = 62,4 \cdot e^{-j9,1} = (61,61 - j9,87) \text{ В}.$$

## 6. Составим баланс мощностей

$$\begin{aligned}\sum E_i \cdot I_i^* &= \sum I_i^2 \cdot R_i + j \sum I_i^2 \cdot X_i \\ \sum E_i \cdot I_i^* &= 120 \cdot 4,184 \cdot e^{j35,4} = 502,08 \cdot e^{j35,4} = 502,08 \cdot (\cos(35,4) + j\sin(35,4)) = \\ &= 409,259 + j290,845B\end{aligned}$$

Имеем:

$$P_{\text{ист}}=409,259\text{Вт}; Q_{\text{ист}}=290,845 \text{ Вар}$$

$$\begin{aligned}\sum I_i^2 \cdot R_i &= (6,242)^2 \cdot 6 + (4,184)^2 \cdot 10 = 233,775 + 175,058 = 408,833\text{Вт} \\ I_1^2 \cdot X_i &= j \cdot (16,242)^2 \cdot 8 + (4,184)^2 \cdot 27 + (4,184)^2 \cdot (-17) + (3,12)^2 \cdot (-20) = \\ &= j \cdot (311,7005 + 472,658 - 297,599 - 194,688) = j \cdot (292,071)\text{вар}\end{aligned}$$

Отсюда имеем, что

$$409,259 + j290,845 = 408,833 + j292,071, \text{ т.е. токи найдены верно.}$$

## 7. Потенциалы точек по внешнему контуру

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_a &= 0 \\ \dot{\varphi}_c &= \dot{\varphi}_a + \dot{I}_1 R_1 = 0 + 37,452e^{-j62,1} = (17,52 - j33,1)B \\ \dot{\varphi}_d &= \dot{\varphi}_c + \dot{U}_4 = (17,52 - j33,1) + (44,13 + j23,37) = (61,65 - j9,73) = 62,41e^{j9,1}B \\ \dot{\varphi}_e &= \dot{\varphi}_d + \dot{U}_{L2} = (61,65 - j9,73) + (65,44 + j92,08) = (126,69 + j82,35) = 151,1e^{j33}B \\ \dot{\varphi}_f &= \dot{\varphi}_e + \dot{U}_{R2} = (126,69 + j82,35) + (34,1 - j24,24) = (160,79 + j58,11) = 170,97e^{j20}B \\ \dot{\varphi}_b &= \dot{\varphi}_f - \dot{E}_2 = 120 - 120 = 0\end{aligned}$$

7. Векторная диаграмма напряжения токов приведена на рис. 73.

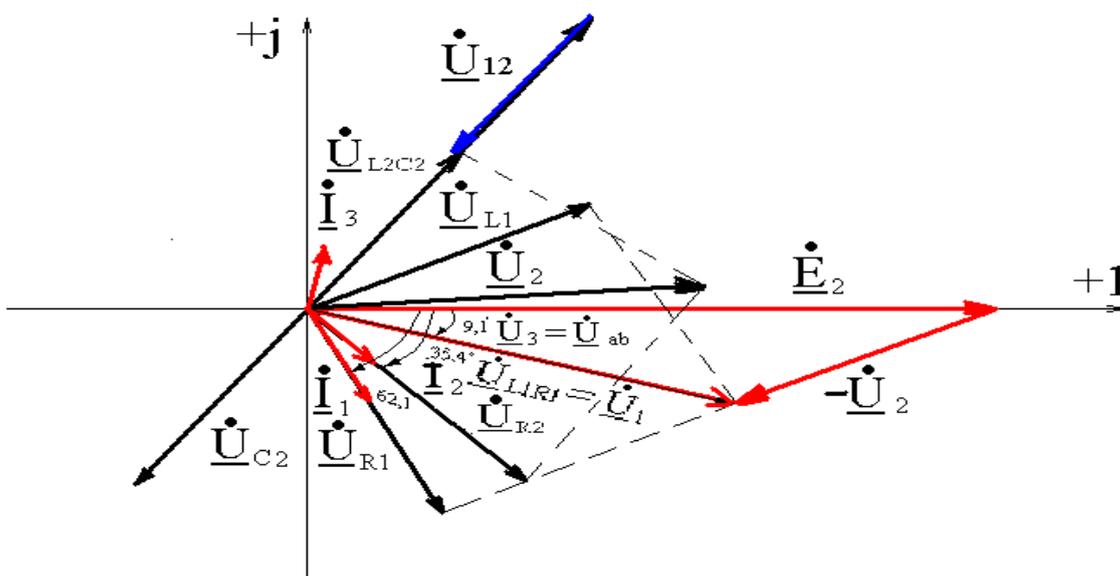


Рис. 73

### 4.7. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Определить амплитудные  $U_m$  и действующее  $U$  значение синусоидного напряжения, если его среднее значение  $U_{cp}=198V$ .

Ответ:  $U_m=310,8V$ ;  $U=220V$ .

**Задача 2.** Определить комплексное сопротивление  $\underline{Z}$ , полное сопротивление цепи  $Z$ , ток  $I$  в электрической цепи, если комплексное напряжение  $\dot{U}=220V$ , а ток  $\dot{I}=(8,8-j6,6)A$

Ответ:  $\underline{Z}=(16+j12) \text{ Ом}$ ;  $Z=20 \text{ Ом}$ ;  $I=11 \text{ А}$ .

**Задача 3.** Определить ток  $I$ , равный сумме комплексных токов  $\dot{I}_1=(3+j4)A$  и  $\dot{I}_2=(2+j)A$  представить суммарный ток  $I$  показательной форме записи.

Ответ:  $I=7,05A$ ;  $\dot{I}=7,051^{45^\circ} A$ .

#### Задача 4.

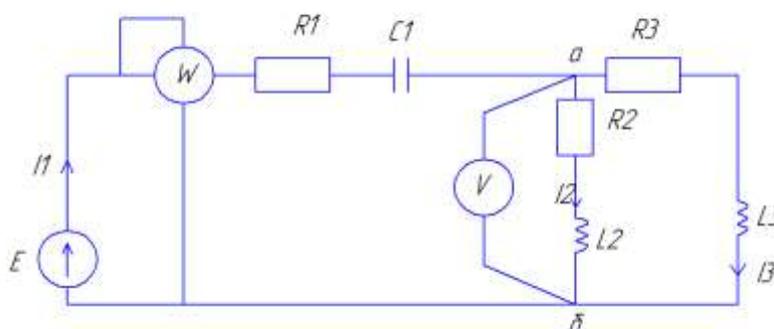


Рис. 74

Для приведенной электрической цепи (рис. 73) при  $\dot{E}=100V$ ;  $L_2=9,6\text{мГн}$ ;  $L_3=15,9\text{мГн}$ ;  $C_1=318 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=8\text{Ом}$ ;  $R_2=3\text{Ом}$ ;  $R_3=4\text{Ом}$ ; определить токи в ветвях, показания приборов.

Ответ:  $\dot{I}_1=7,9e^{j89,9^\circ}=(6,06+j5,09) A$ ;  
 $\dot{I}_2=4/75e^{j42,5^\circ}=(3,5+j3,209) A$ ;  
 $\dot{I}_3=3,15e^{j36,2^\circ}=(2,54+j1,86) A$ ;  
 $U_{ab}=20,145 \text{ В}$ ;  $P=606,6 \text{ Вт}$ .

#### 4.8. Краткие выводы четвертой главы

1. Синхронные генераторы, используемые в промышленности, вырабатывают синусоидальную ЭДС

$$e = E_m \cdot \sin \omega t$$

2. При расчете электрических цепей синусоидального тока используют различные формы представления синусоидальных величин. Эти формулы можно разделить на две группы: аналитические и графические.

К *аналитическим* формам относятся представление синусоидальных величин их *мгновенными значениями*. При этом используют две формы записи с помощью функции синуса или косинуса, т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_U); \\ u(t) &= U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) \end{aligned}$$

Для графического представления синусоидально изменяющихся величин представляют *комплексным значением*

$$\dot{U}(t) = U_m \cdot \sin e^{j(\omega t + \varphi_U)}, \quad (101)$$

где  $\dot{U}(t)$  – комплексное мгновенное значение напряжения.

Модуль этой комплексной величины равен амплитуде колебания, а аргумент растет пропорционально затраченному времени  $t$ .

3. Переход от комплексного к мгновенному значению осуществляются при помощи операций вычисления вещественной или мнимой частей комплексной величины.

$$\begin{aligned} u(t) &= J_m [U_m e^{j(\omega t + \varphi_U)}] = U_m \sin(\omega t + \varphi_U); \\ u(t) &= \text{Re}[U_m e^{j(\omega t + \varphi_U)}] = U_m \cos(\omega t + \varphi_U); \end{aligned}$$

4. Использование комплексной формы записи напряжений токов имеет ряд преимуществ по сравнению с применением мгновенных значений. Так дифференцирование и интегрирование комплексного мгновенного напряжения можно свести к умножению или делению его комплексной амплитуды на оператор поворота  $j \cdot \omega = \omega \cdot e^{j\pi/2}$ , так как

$$\frac{d}{dt} \dot{U}(t) = \frac{d}{dt} \dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t}; \quad (102)$$

$$\int \dot{U}(t) dt = \int \dot{U}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\dot{U}_m}{j\omega} e^{j\omega t}; \quad (103)$$

5. При графическом представлении гармонических колебаний используют их изображение в виде функции времени (временные графики в прямоугольных координатах) и векторов на комплексной плоскости (векторной диаграммой).

6. При энергетических расчетах в электрических цепях переменного тока пользуются действующим значения напряжения и тока.

$$\begin{cases} U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707U_m. \\ I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707I_m. \end{cases} \quad (104)$$

Действующее значение тока  $I$  и напряжения  $U$  эквивалентны воздействию соответствующим значениям постоянного тока и напряжения. При этом эквивалентные постоянные величины являются комплексными числами, которые изображают в виде векторов на комплексной плоскости ( $1; j$ ).

7. Мощность и энергия переменного тока можно рассчитать при любой форме записи напряжений и токов. При этом различают следующие виды мощностей:

-мгновенную мощность

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = P + P_m. \quad (105)$$

-среднюю мощность

$$P = UI \cos \varphi \quad (106)$$

-переменную мощность

$$P(s) = S \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i). \quad (107)$$

-реактивную мощность

$$Q = UI \sin \varphi \quad (108)$$

-полную мощность

$$S = UI + \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (109)$$

-комплексную мощность

$$\dot{S} = \dot{U} I^* = P + jQ \quad (110)$$

8. Энергия в электрических цепях подразделяют на две группы:

-диссипативную, которая рассеивается цепью в сопротивлениях  $R$  и пропорционально времени  $t$ .

$$W_R = \sum \left[ \int P_{R_k} \cdot dt \right] = \sum (I_k^2 \cdot R_k \cdot t) \quad (111)$$

-энергия, которая записывается в индуктивных и емкостных элементах  $L_K$  и  $C_K$ .

$$W_K = W_M + W_\Sigma = \sum \left( \frac{L_K \cdot I_K^2}{2} + \frac{C_K \cdot U_K^2}{2} \right) = Q \cdot I \cdot \omega, \quad (112)$$

где  $W_M$ - мощность, записываемая в индуктивных элементах  $L_K$ ;

$$W_M = \frac{L_K \cdot I_K^2}{2}$$

$W_{\text{Э}}$ - мощность, записываемая в емкостных элементах  $C_K$ ;

$$W_M = \frac{C_K \cdot U_K^2}{2}$$

9. Состояние электрической цепи, содержащей индуктивность  $L_K$  и емкость  $C_K$ , при котором сдвиг по фазе между напряжением и током на зажимах цепи равен нулю называют резонансом. Такое положение может иметь место только в том случае, если входное сопротивление или входящая проводимость электрической цепи на некоторой частоте  $\omega_{\text{рез}}$  имеют активный характер, т.е. выполняется одно из условий

$$\begin{aligned} X_{BX}(\omega_{\text{PEЗ}}) &= 0 \\ B_{BX}(\omega_{\text{PEЗ}}) &= 0 \end{aligned}$$

При выполнении первого условия в цепи имеется - *резонанс напряжения*, а при выполнении второго условия - *резонанс токов*.

***При резонансе напряжений, напряжение при реактивном входном сопротивлении равно нулю, т.е. резонансное сопротивление можно заменить перемычкой, а при резонансе токов ток в реактивной проводимости равен нулю, т.е. резонансную реактивную проводимость можно заменить разрывом цепи.***

10. Индуктивное или емкостное сопротивление при резонансе называется ***характеристическим (волновым) сопротивлением*** резонансного контура

$$\rho = \omega_{\text{PEЗ}} \cdot L = \frac{1}{\omega_{\text{PEЗ}} \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (113)$$

при  $\rho \gg R$  напряжение на реактивных элементах ( $U_L$  и  $U_C$ ) могут быть во много раз входного напряжения.

11. Отношение напряжения на катушке или конденсаторе к напряжению источника при резонансе называют ***добротностью контура***.

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_{\text{PEЗ}} \cdot L}{R} = \frac{\rho}{R} \quad (114)$$

Это параметр безразмерный. Он показывает во сколько раз при резонансе напряжение их отдельных реактивных элементах больше входных.

Величина, обратная добротности контура, называется ***затуханием контура***.

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\omega_{\text{PEЗ}} \cdot L} = \frac{R}{\rho} \quad (115)$$

## Глава 5. Цепи с взаимной индуктивностью

### 5.1. Индуктивная связь. Степень и коэффициент связи

Связь электрических цепей посредством магнитного поля называется *индуктивной*.

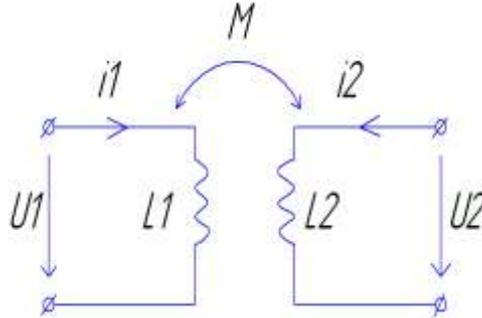


Рис. 75

Рассмотрим две индуктивно – связанные катушки (рис. 75). Если к первой подключить переменное напряжение  $U_1$ , то через неё будет протекать переменный ток  $i_1$ . Он создает магнитное поле, которое будет пересекать обмотки первой  $L_1$  и частично обмотки второй  $L_2$  катушек. При этом в первой катушке будет наводить ЭДС самоиндукции  $e_{11}$

$$e_{11} = -L_1 \frac{d i_1}{d t} \quad (116)$$

а во второй  $e_{21}$

$$e_{21} = -M \frac{d i_1}{d t}, \quad (117)$$

где  $M$ - взаимная индуктивность (коэффициент взаимной индукции).

Взаимная индукция  $M$ - это скалярная величина, равная отношению потокосцепления  $\psi_{12}$  через первую катушку к порождающему току  $i_2$  через вторую катушку и, наоборот, отношению потокосцепления  $\psi_{21}$  второй катушки к току  $i_1$  через первую, т.е.

$$M = \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{\psi_{21}}{i_1} \quad (118)$$

При замыкании цепи второй катушки под действием ЭДС  $e_{21}$  через неё будет проходить ток  $i_2$ . Он создает магнитный поток, который будет наводить на второй катушке  $L_2$  ЭДС самоиндукции

$$e_{22} = -L_2 \frac{d i_2}{d t} \quad (119)$$

а в первой катушке  $L_1$ -ЭДС взаимной индукции

$$e_{12} = -M \frac{d \cdot i_2}{d \cdot t} \quad (120)$$

Отношение ЭДС взаимной индукции к ЭДС самоиндукции, создаваемой током, называют **степенью индуктивной связи**  $K_{21}$  и  $K_{12}$

$$\begin{aligned} K_{21} &= \frac{e_{21}}{e_{11}} = \frac{M}{L_1}; \\ K_{12} &= \frac{e_{12}}{e_{22}} = \frac{M}{L_2} \end{aligned} \quad (121)$$

Физический смысл коэффициента индукционной связи  $K_{21}$  и  $K_{12}$  означает долю магнитного потока одной катушки, проходящего через витки другой, когда в ней отсутствует ток.

Среднее геометрическое значение из степени индуктивных связей называют **коэффициентом связи**.

$$K = K_{12} \cdot K_{21} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} < 1 \quad (122)$$

Этот коэффициент всегда меньше единицы, так магнитный поток взаимной индукции всегда меньше потока самоиндукции  $\phi_{12}$  и  $\phi_{21}$ .

Суммарные потоки, пронизывающие первый и второй контуры.

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{1L} \pm \phi_{12}; \\ \phi_2 &= \phi_{2L} \pm \phi_{21} \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Если направление потока взаимной индукции совпадает с направлением потока самоиндукции данного контура, то имеет место **согласное** включение, т.е. магнитные потоки и токи контуров направление согласно. В случае противоположного направления говорят о **встречном направлении** потоков.

Знак(+) В (123) соответствует согласному направлению потока, а (-) встречному направлению.

## 5.2. ЭДС взаимной индукции

Полные потокосцепления первого и второго контуров.

$$\psi_1 = w_1 \cdot \phi_1 = w_1(\phi_{1L} \pm \phi_{12}) = w_1 \cdot \phi_{1L} \pm w_1 \cdot \phi_{12} = L_1 \cdot i_1 \pm M_{12} \cdot i_2 \quad (124)$$

$$\psi_2 = w_2 \cdot \phi_2 = w_2(\phi_{2L} \pm \phi_{21}) = w_2 \cdot \phi_{2L} \pm w_2 \cdot \phi_{21} = L_2 \cdot i_2 \pm M_{21} \cdot i_1 \quad (125)$$

Здесь  $M_{12}$ -взаимная индукция

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{w_1 \cdot \phi_{12}}{i_2}; \\ M_{21} &= \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \cdot \phi_{21}}{i_1}. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Для линейных цепей  $M_{12} = M_{21} = M$ .

ЭДС, индуцируемые в первом и втором контуре с учетом (124) и (125) можно записать

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\psi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} \pm e_{1M}; \\ e_2 &= -\frac{d\psi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} \pm e_{2M}. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Здесь  $e_{1L}$  и  $e_{2L}$  - ЭДС самоиндукции;  
 $e_{1M}$  и  $e_{2M}$  - ЭДС взаимной индукции.

Согласно (127) ЭДС каждой катушки определяется алгебраической суммой ЭДС самоиндукции и взаимной индукции.

Два зажима называют **одноименными**, если при одинаковом направлении токов относительно этих зажимов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции складываются. Такие выводы обозначаются точками или звездочками (рис. 75).

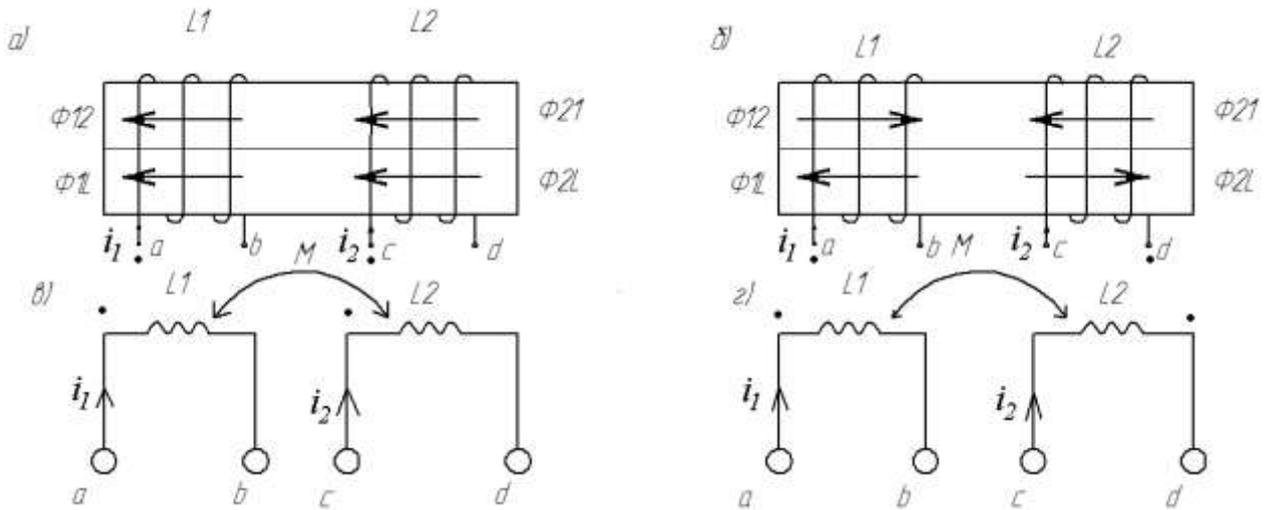


Рис. 76

Одинаково направленные токи  $i_1$  и  $i_2$  (рис. 76) относительно зажимов а и с вызывают совпадение по направлению потоки самоиндукции  $\phi_{1L}$  ( $\phi_{2L}$ ) и взаимной индукции  $\phi_{12}$  ( $\phi_{21}$ ), т.е. зажимы а и с являются **одноименными**.

### 5.3. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек

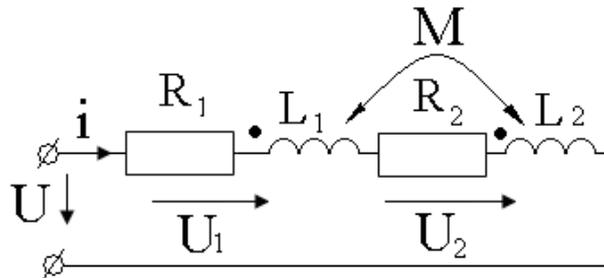


Рис. 77

Рассмотрим две катушки  $L_1$  и  $L_2$ , соединенные последовательно (рис. 76).

**При согласном включении** ток в обеих катушках направлен одинаково относительно одноименных зажимов, поэтому падение напряжения на взаимной индуктивности в уравнениях Кирхгофа для мгновенных значений запишем со знаком (+) «плюс».

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= i \cdot R_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}; \\ U_2 &= i \cdot R_2 + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Уравнение (128) запишем в комплексной форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I} \cdot R_1 + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I}; \\ \dot{U}_2 &= \dot{I} \cdot R_2 + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Напряжение на зажимах цепи запишется:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{I} \cdot R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \dot{I} + j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I} + \dot{I} \cdot R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \dot{I} + j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I} = \\ &= \dot{I} [(R_1 + R_2) + j \cdot \omega (L_1 + L_2 + 2M)] = \dot{I} \cdot \underline{Z}_{\text{СОГЛ}} \end{aligned} \quad (130)$$

Здесь  $\underline{Z}_{\text{СОГЛ}}$  полное сопротивление цепи при согласном включении:

$$\underline{Z}_{\text{СОГЛ}} = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 + 2M). \quad (131)$$

Для встречного включения имеем:

$$\underline{Z}_{\text{ВСТР}} = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2M). \quad (132)$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{I} \cdot [(R_1 + R_2) + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2M)], \quad (133)$$

При этом  $\underline{Z}_{\text{СОГЛ}} > \underline{Z}_{\text{ВСТР}}$ . Зная  $\underline{Z}_{\text{СОГЛ}}$  и  $\underline{Z}_{\text{ВСТР}}$ , можно определить магнитную индукцию

$$M = \frac{\underline{Z}_{\text{СОГЛ}} - \underline{Z}_{\text{ВСТР}}}{4 \cdot \omega}. \quad (134)$$

Векторная диаграмма для **согласного** включения приведенного на (рис. 77), а для встречного на (рис. 78).

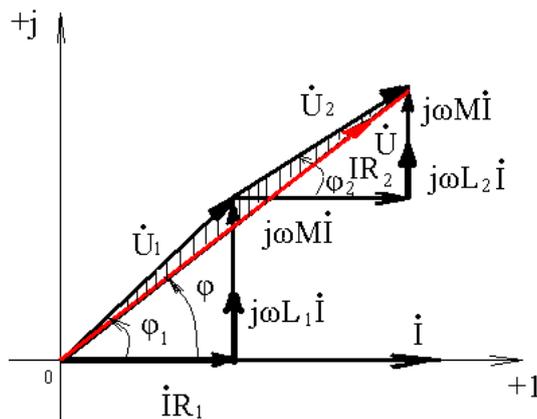


Рис. 78

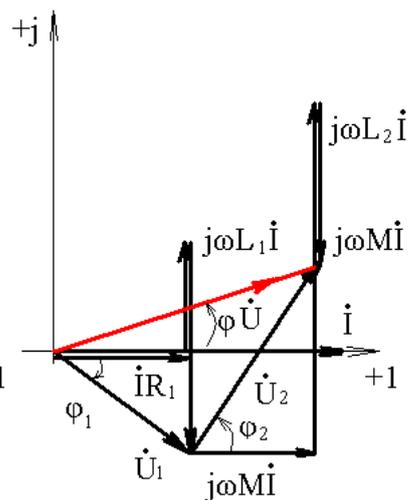


Рис. 79

### 5.4. Пример расчета сложной цепи

Расчет разветвленных цепей можно вести с помощью уравнений Кирхгофа или методом контурных токов.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа руководствуются следующим правилом для определения знаков напряжения на взаимной индуктивности.

**Если направление обхода в одном контуре и положительное направление тока в другом контуре совпадают относительно одноименных зажимов, то напряжения взаимной индуктивности берется со знаком «плюс». При несовпадении этих направлений относительно одноименных выводов, она записывается со знаком «минус».**

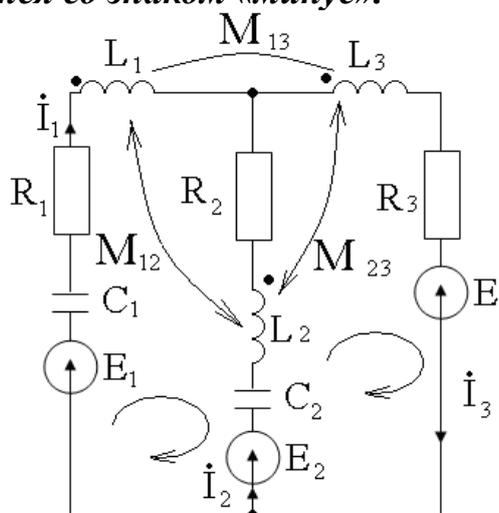


Рис. 80

Разберем это на примере (рис. 80). Требуется составить систему уравнений на нахождение токов в ветвях при известном значении сопротивлений и ЭДС.

Предварительно выбираем *положительное* направление токов в ветвях и направления обходов контуров.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{I}_1 \cdot R_1 - j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \dot{I}_1 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_1} - j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot \dot{I}_2 + j \cdot \omega \cdot M_{13} \cdot \dot{I}_3 - \dot{I}_2 \cdot R_2 - j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \dot{I}_2 - \left(-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} \cdot \dot{I}_2\right) + \\ + j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot \dot{I}_1 - j \cdot \omega \cdot M_{23} \cdot \dot{I}_3 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2; \\ \dot{I}_2 \cdot R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \dot{I}_2 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} \cdot \dot{I}_2 - j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot \dot{I}_1 - j \cdot \omega \cdot M_{23} \cdot \dot{I}_3 + \dot{I}_3 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L_3 \cdot \dot{I}_3 + \\ + j \cdot \omega \cdot M_{13} \cdot \dot{I}_1 - j \cdot \omega \cdot M_{23} \cdot \dot{I}_2 = \dot{E}_2 - \dot{E}_3. \end{array} \right.$$

Решая эту систему уравнений при известных параметрах цепи, находим токи в цепях.

### 5.5. Краткие выводы пятой главы

1. Явления возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении тока в другом называется взаимной индукцией, а такие электрические цепи называют индуктивно связанными цепями.

2. Если направление взаимной индукции совпадет с направлением потока самоиндукции данного контура, то говорят, что магнитные потоки и токи контура направлены *согласно*. Если имеет место противоположное направление, то говорят о *встречном* направлении потоков.

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{1L} \pm \phi_{12}; \\ \phi_2 &= \phi_{2L} \pm \phi_{21} \end{aligned} \right\}$$

где  $\phi_{1L}$  - поток самоиндукции первого контура, созданным током  $i_1$ ;

$\phi_{12}$  - поток взаимной индукции, созданный током второй катушки  $i_2$  в первом контуре.

«+»-соответствует *согласному* направлению потоков.

«-»-соответствует *встречному* направлению потоков.

3. Отношение потокосцепления взаимной индукции в одной цепи к току в другой цепи называют *взаимной индуктивностью* (коэффициент взаимной индукции).

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{\omega_1 \cdot \phi_{12}}{i_2};$$

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{\omega_2 \cdot \phi_{21}}{i_1}.$$

Для линейных цепей  $M_{12} = M_{21} = M$ .

3. Полное сопротивление цепи при последовательном включение элементов схемы (рис. 77) определяется зависимостями (131) и (132).

$$Z_{\text{СОГЛ}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M);$$

$$Z_{\text{ВСТР.}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M).$$

5. Взаимная индукция определяется опытным путем

$$M = \frac{Z_{\text{СОГЛ}} - Z_{\text{ВСТР.}}}{4 \cdot \omega}.$$

## Глава 6. Четырехполюсники (ЧП)

### 6.1. Основные уравнения ЧП

Источник и приемник электрической энергии соединяют некоторой промежуточной цепью. Этой промежуточной цепью является четырехполюсник.

*Четырехполюсником* называют часть электрической цепи, имеющей две пары зажимов, которые могут быть входными или выходными (рис. 81).

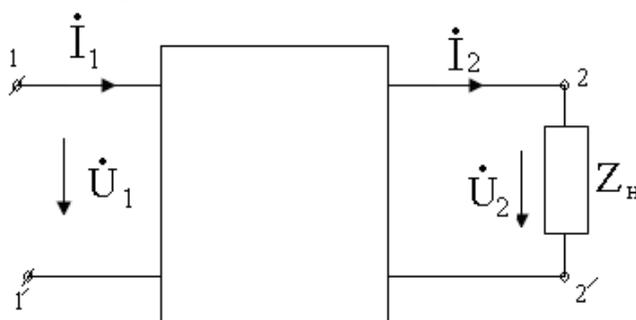


Рис. 81

К первичным зажимам подключается источник электрической энергии, а к выходным подключается нагрузка  $Z_n$ .

ЧП изображается в виде прямоугольника имеющего два входных зажима 1-1' и два выходных зажима 2-2' (рис. 81).

В качестве ЧП могут быть линии электродвижка, трансформаторы, выпрямительное устройство, фильтры электрические, усилители и устройства с двумя парами зажимов.

Основной смысл теории ЧП заключается в том, что, пользуясь некоторыми их обобщенными параметрами, можно определить токи и напряжения на входе и выходе. Так, для любого пассивного ЧП напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  на входе связанные с напряжением  $\dot{U}_2$  и током  $\dot{I}_2$  на выходе (рис. 81) двумя уравнениями, которые называют **основными уравнениями четырехполюсников**.

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A} \cdot \dot{U}_2 + \dot{B} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= \dot{C} \cdot \dot{U}_2 + \dot{D} \cdot \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (135)$$

где  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$ ,  $\dot{C}$  и  $\dot{D}$  - комплексные коэффициенты четырехполюсника. Они зависят от внутреннего характера элементов четырехполюсника, который связан с контактами.

$$\dot{A} \cdot \dot{D} - \dot{B} \cdot \dot{C} = 1. \quad (136)$$

На основании уравнения ЧП могут построить различные схемы замещения, которые облегчают исследование его стойкость на практике чаще всего пользуются Тп П – образцами схемами замещения (рис. 81).

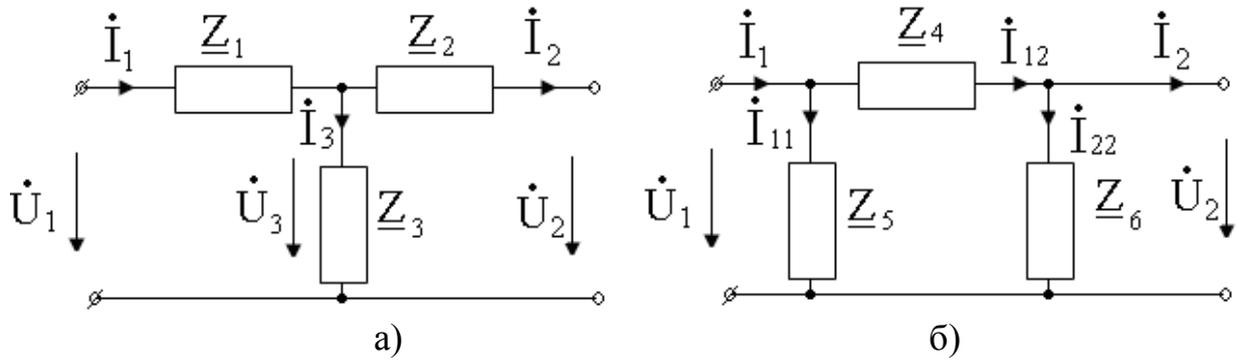


Рис. 82

### 6.2. T-образная схема замещения 4П

Определим постоянные четырехполюсника для T-образной схемы замещения (рис. 82а).

На основании закона Кирхгофа имеем

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{-1} + \dot{U}_3 = \dot{I}_1 Z_{-1} + \dot{I}_2 Z_{-2} + \dot{U}_2; \quad (137)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1 + \dot{I}_3 \pm \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_3}{Z_{-3}} = \dot{I}_2 + \frac{\dot{I}_2 Z_{-2} + \dot{U}_2}{Z_{-3}}; \quad (138)$$

Подставим (138) в (137) и после преобразования получим

$$\dot{U}_1 = \left(1 + \frac{Z_{-1}}{Z_{-3}}\right) \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \left( Z_{-1} + Z_{-2} + \frac{Z_{-1} \cdot Z_{-2}}{Z_{-3}} \right) = \dot{A} \cdot \dot{U}_2 + \dot{B} \cdot \dot{I}_2,$$

где

$$\dot{A} = 1 + \frac{Z_{-1}}{Z_{-3}} = 1 + Z_{-1} \cdot Y_{-3};$$

$$\dot{B}_1 = \left( Z_{-1} + Z_{-2} + \frac{Z_{-1} \cdot Z_{-2}}{Z_{-3}} \right) = Z_{-1} + Z_{-2} + Z_{-1} Z_{-2} Y_{-3};$$

После перегруппировки слагаемых в уравнение (138) имеем.

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{Z_{-3}} \cdot \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \cdot \left( 1 + \frac{Z_{-2}}{Z_{-3}} \right) = \dot{C} \cdot \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \cdot \dot{D};$$

где

$$\dot{C} = \frac{1}{Z_{-3}} = Y_{-3}; \quad \dot{D} = 1 + \frac{Z_{-2}}{Z_{-3}} = 1 + Z_{-2} \cdot Y_{-3}.$$

Коэффициенты  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$  и  $\dot{D}$  - комплексные параметры четырехполюсника. Причем коэффициенты  $\dot{B}$  - имеет размерность сопротивления,  $\dot{C}$  - размерность проходимости,  $\dot{A}$  и  $\dot{D}$  - безразмерные.

Если  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ , то  $\dot{A} = \dot{D}$ , то в этом случае четырехполюсник называется *симметричным*.

По известным коэффициентам четырехполюсника можно определить параметры Т-образной схемы

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{A}-1}{\dot{C}}; \underline{Z}_2 = \frac{\dot{D}-1}{\dot{C}}; \underline{Z}_3 = \frac{1}{\dot{C}}. \quad (139)$$

### 6.3. II – образная схема замещения ЧП

Определим постоянные коэффициенты четырехполюсника для II – образной схемы замещения (рис. 82,б), при известных параметрах  $\underline{Z}_{-4}; \underline{Z}_{-5}$  и  $\underline{Z}_{-6}$ .

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_{12} = \dot{I}_{22} + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{-6}} + \dot{I}_2 \quad (140)$$

По второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{12} \cdot \underline{Z}_{-4} + \dot{U}_2 = \left( \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{-6}} + \dot{I}_2 \right) \cdot \underline{Z}_{-4} + \dot{U}_2 = \dot{U}_2 \cdot \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{-4}}{\underline{Z}_{-6}} \right) + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_{-4} = \dot{A} \cdot \dot{U}_2 + \dot{B} \cdot \dot{I}_2; \quad (141)$$

где 
$$\dot{A} = \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{-4}}{\underline{Z}_{-6}} \right); \dot{B} = \underline{Z}_{-4}. \quad (142)$$

Ток на входе четырехполюсника (рис. 82,б) после подстановки из (141).

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{-5}} + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{-6}} + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{-5}} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{-4}}{\underline{Z}_{-6}} \right) + \\ &+ \dot{I}_2 \frac{\underline{Z}_{-4}}{\underline{Z}_{-5}} + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{-6}} + \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \left( \frac{\underline{Z}_{-4}}{\underline{Z}_{-5}} + \frac{\underline{Z}_{-4}}{\underline{Z}_{-5}} + \frac{\underline{Z}_{-6}}{\underline{Z}_{-5} \cdot \underline{Z}_{-6}} \right) + \dot{I}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{-4}}{\underline{Z}_{-5}} \right) = \\ &= \dot{C} \cdot \dot{U}_2 + \dot{D} \cdot \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Здесь 
$$\dot{C} = \begin{pmatrix} Z_{-4} + Z_{-5} + Z_{-6} \\ Z_{-5} \cdot Z_{-6} \end{pmatrix} + ; \dot{D} = \begin{pmatrix} Z_{-4} \\ Z_{-5} \end{pmatrix} \quad (143)$$

По известным коэффициентам  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$  и  $\dot{D}$ . можно определить параметры П – образной схемы замещения

$$Z_{-4} = \dot{B}; \quad Z_{-5} = \frac{\dot{B}}{\dot{D}-1}; \quad Z_{-6} = \frac{\dot{B}}{\dot{A}-1}. \quad (144)$$

Если  $Z_{-4} = Z_{-6}$ , то четырехполюсник будет симметричен и  $\dot{A} = \dot{D}$ .

#### 6.4. Опытные определения коэффициентов четырехполюсника

Для этого проводим опыт холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (К.З.).

**Опыт холостого хода** (рис. 83) ( $I_{20} = 0$ ).

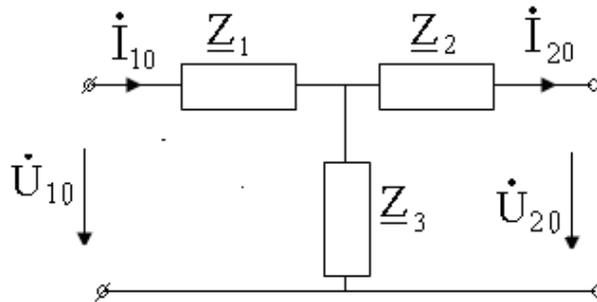


Рис. 83

В этом режиме ток ( $I_{20} = 0$ ), тогда уравнение (135) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{10} &= \dot{A} \cdot \dot{U}_{20}; \\ \dot{I}_{10} &= \dot{C} \cdot \dot{I}_{20}. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

отсюда имеем

$$Z_{-10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{U_{10}}{I_{10}} \cdot e^{j\varphi_{10}} = \frac{A \cdot U_{20}}{C \cdot I_{20}} = \frac{\dot{A}}{\dot{B}}. \quad (146)$$

**Опыт короткого замыкания** ( $U_{2K} = 0$ ).

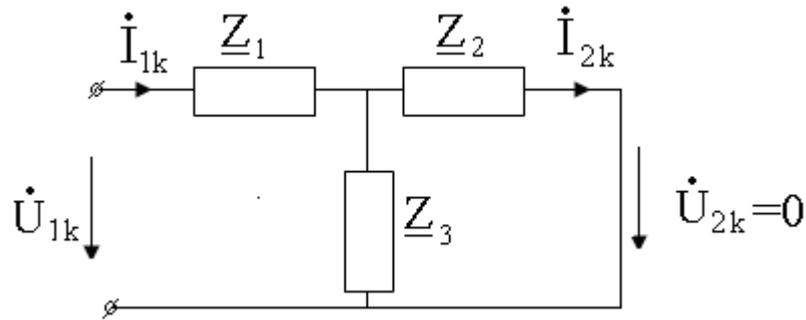


Рис. 83

Так как в этом в этом режиме напряжение ( $U_{2K} = 0$ ), то уравнения (135) запишутся

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1K} &= \dot{B} \cdot \dot{U}_{2K}; \\ \dot{I}_{1K} &= \dot{C} \cdot \dot{I}_{2K}. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

отсюда имеем

$$Z_{-1K} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{I}_{1K}} = \frac{\dot{B} \cdot \dot{U}_{2K}}{\dot{D} \cdot \dot{I}_{2K}} = \frac{\dot{B}}{\dot{D}}. \quad (148)$$

С учетом уравнения(145) и (147) уравнения (135) запишутся

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A} \cdot \dot{U}_2 + \dot{B} \cdot \dot{I}_2 = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1K}; \\ \dot{I}_1 &= \dot{C} \cdot \dot{U}_2 + \dot{D} \cdot \dot{I}_2 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1K}. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Таким образом, напряжение и ток четырехполюсника могут быть определены из опытов холостого хода и короткого замыкания, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1K} \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1K} \end{aligned} \right\} \quad (150).$$

С учетом уравнений (46) и(148) коэффициенты четырехполюсника определяются из уравнений.

$$\dot{A} = \sqrt{\frac{Z_{-10}}{Z_{-20} - Z_{-2K}}} = \sqrt{\frac{Z_{-10} \cdot Z_{-1K}}{Z_{-2K} \cdot (Z_{-10} - Z_{-1K})}}; \quad (151)$$

$$\dot{B} = \dot{A} \cdot Z_{-2K}; \quad (152)$$

$$\dot{C} = \frac{\dot{A}}{Z_{-10}}. \quad (153)$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{B}}{Z_{-1K}}. \quad (154)$$

### 6.5. Типовые задачи с решениями

#### Задача 1

Опытным путем установлено, что  $Z_{-10} = 7,815e^{-j50^{\circ}12'}$  Ом;  $Z_{-1K} = 12,5e^{-j66^{\circ}23'}$  Ом;  $Z_{-2K} = 3,33e^{-j27^{\circ}33'}$  Ом. Требуется найти коэффициенты четырехполосника  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$ ,  $\dot{C}$  и  $\dot{D}$ .

#### Решение:

1. Коэффициент четырехполосника  $\dot{A}$  найдем из формулы (151). Предварительно найдем разность

$$Z_{-10} - Z_{-1K} = 7,815e^{-j50^{\circ}12'} - 12,5e^{j66^{\circ}23'} = (5 - j6) - (5 + j12) = -j18 = 18e^{-j90^{\circ}} \text{ Ом.}$$

Тогда

$$\dot{A} = \sqrt{\frac{Z_{-10} \cdot Z_{-1K}}{Z_{-2K} \cdot (Z_{-10} - Z_{-1K})}} = \sqrt{\frac{7,815e^{-j50^{\circ}12'} \cdot 12,5e^{j66^{\circ}23'}}{3,33e^{j27^{\circ}33'} \cdot 18e^{-j90^{\circ}}}} = \sqrt{\frac{97,687e^{j16^{\circ}11'}}{59,9e^{-j62^{\circ}27'}}} = \sqrt{1,63e^{j78^{\circ}38'}} = 1,28e^{j39^{\circ}19'}$$

$$\dot{C} = \frac{\dot{A}}{Z_{-10}} = \frac{1,28e^{j39^{\circ}19'}}{7,815e^{-j50^{\circ}12'}} = 0,164e^{j89^{\circ}39'} \text{ См.}$$

$$\dot{B} = \dot{A} \cdot Z_{-2K} = 1,28e^{j39^{\circ}19'} \cdot 3,33e^{j27^{\circ}33'} = 4,26e^{j66^{\circ}52'} \text{ Ом.}$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{B}}{Z_{-1K}} = \frac{4,26e^{j66^{\circ}52'}}{12,5e^{j66^{\circ}23'}} = 0,341e^{j29'} = 0,34 + j0,03 \approx 0,34.$$

#### Задача 2

Найти параметры T-образной схемы замещения четырехполосника (рис. 85), если известны его коэффициенты

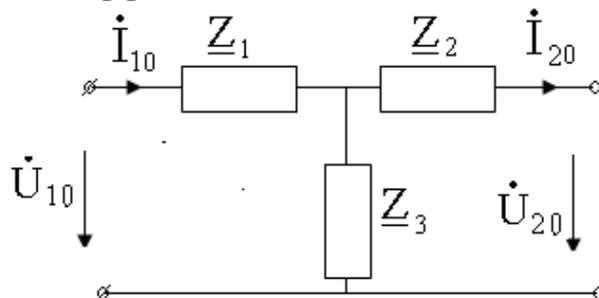


Рис. 85

$$\begin{aligned}\dot{A} &= 1,28e^{j39^{\circ}19'}; \\ \dot{B} &= 4,26e^{j66^{\circ}52'}; \\ \dot{C} &= 0,164e^{j89^{\circ}39'}; \\ \dot{D} &= 0,34.\end{aligned}$$

**Решение:**

$$Z_{-1} = \frac{\dot{A}-1}{\dot{C}} = \frac{1,28 \cdot e^{j39^{\circ}19'} - 1}{0,164 \cdot e^{j89^{\circ}31'}} = \frac{(0,98 + j \cdot 0,784) - 1}{0,164e^{j89^{\circ}31'}} = \frac{(-0,02 + j784)}{0,164e^{j89^{\circ}31'}} = 5,22e^{j1,7^{\circ}} = 5,218 + j0,155$$

$$Z_{-2} = \frac{\dot{D}-1}{\dot{C}} = \frac{0,34-1}{0,164 \cdot e^{j89^{\circ}31'}} = \frac{-0,66}{0,164e^{j89^{\circ}31'}} = 4,02e^{-j89^{\circ}31'} = 4,02e^{j90^{\circ}29'} \text{ Ом.}$$

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \dot{C} = 0,164e^{j89^{\circ}31'} \text{ См.}$$

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \frac{1}{0,164e^{j89^{\circ}31'}} \approx 6,1e^{-j89^{\circ}31'} = 0,05 - j6,09 \text{ Ом.}$$

### 6.6. Краткие выводы шестой главы

1. Теория четырехполюсника рассматривают основную задачу электротехники – передачу электроэнергии от источника к приемнику через промежуточное звено, называемое четырехполюсником.

2. Основными уравнениями для четырехполюсника является выражения:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{A} \cdot \dot{U}_2 + \dot{B} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \dot{C} \cdot \dot{U}_2 + \dot{D} \cdot \dot{I}_2;\end{aligned}$$

3. Коэффициенты четырехполюсника могут быть определены из опытов холостого хода (ХХ) или короткого замыкания (КЗ),

$$\dot{A} = \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z_{20} - Z_{2K}}}; \quad \dot{B} = \dot{A} \cdot Z_{2K}; \quad \dot{C} = \frac{\dot{A}}{Z_{10}}; \quad \dot{D} = \frac{\dot{B}}{Z_{1K}}.$$

4. Вторичными параметрами четырехполюсника является характеристическое сопротивление  $Z_{-c}$  и коэффициент передачи (распространение)  $g$ .

$$Z_{-C} = \sqrt{\frac{Z_{-10} \cdot Z_{1K}}{-}} = \sqrt{\frac{B}{C}}; \quad (155)$$

$$g = a + jb; \quad (156)$$

где  $a$  – коэффициент затухания

$$a = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}; \quad (157)$$

$b$  – коэффициент фазы

$$b = \varphi_1 - \varphi_2; \quad (158)$$

Коэффициент распространения можно определить из формулы

$$thg = \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{10}}} \quad (159)$$

# Приложения

**ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН  
ПО МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЕ СИ И ИХ ОБОЗНАЧЕНИЯ**

Величина		Единицы измерения			
Название	обозначение	наименование	Обозначение		Определение
			русское	международное	
Сила электрического тока	I	Ампер	А	А	Сила не изменяющегося тока, который проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины
Температура	T	Кельвин	К	К	Единица измерения температуры равная 1/273 части интервала абсолютно нуля температур ( $-273^{\circ}\text{C}$ ) до температуры таяния льда ( $0^{\circ}\text{C}$ )
	t	Градус Цельсия	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	Та же что и для Кельвина
Сила света	I	Кандела (Свеча)	кд	cd	Сила света, испускаемого с площади $1/600000 \text{ м}^2$ сечения полного излучателя, в перпендикулярном этому сечению направлении, при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при давлении 101325 Па
Световой поток	F	люмен	лм	lm	Производственные силы света источника на телесный угол, в который посылается световой поток. $1 \text{ лм} = 1 \text{ св} \cdot 1 \text{ стер}$
Телесный угол		стерадиан	стер	sr	Стерадиан – телесный угол, вершина которого расположена в центре сферы и который вырезает на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы
Освещенность	E	Люкс	лк	lx	$1 \text{ лм}/1 \text{ м}^2$
Сила	G	Ньютон	Н	N	Сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение $1 \text{ м}/\text{с}^2$ в направлении её действия
Давление	P				
Работа	A	Джоуль	Дж	J	Работа силы 1Н при перемещении ею тела на расстояние 1 м в направлении её действия
Энергия	W				
Мощность	P	Ватт	Вт	W	Мощность при которой за 1 с совершается работа, равная 1 Дж
	N				
Электрическое напряжение	U	Вольт	В	V	Напряжение на участке электрической цепи с постоянным током силой 1А, в котором затрачивается мощность 1Вт

Напряженность электрического поля	$E$	Вольт /на метр	В/м	$V/n$	Напряженность однородного электрического поля, при которой между точками, находящимися на расстоянии 1м вдоль линии напряженности поля, создается разность потенциалов 1 В
Электрическое сопротивление	$R$	Ом	Ом	$\Omega$	Сопротивление проводника, между концами которого при силе тока 1 А возникает напряжение 1 В
Удельное эл. сопротивление	$\rho$	Ом-метр	Ом·м	$\Omega \cdot m$	Электрическое сопротивление, при котором цилиндрический прямолинейный проводник площадью сечения $1 \text{ м}^2$ и длиной 1м имеет сопротивление 1 Ом
Электрическая емкость	$C$	Фарада	$\Phi$	$F$	Емкость конденсатора, между обкладками которого при зарядке 1 Кл возникает напряжение 1В
Электрический заряд	$q$	Кулон	Кл	$C$	Количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника в течение 1с при токе силой 1 А
Магнитный поток	$\Phi$	Вебер	Вб	$Wb$	Магнитный поток, при убывании которого до нуля в контуре, сцепленном с этим потоком сопротивлением 1Ом проходит количество электричества 1Кл
Индуктивность	$L$	Генри	Гн	$H$	Индуктивность контура, с которым при силе постоянного в нем 1 А сцепляется магнитный поток 1 Вб
Магнитная индукция	$B$	Тесла	Тл	$T$	Магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью $1 \text{ м}^2$ равен 1 Вб
Активная мощность электрической цепи	$P$	Ватт	Вт	$W$	Мощность электрической цепи, эквивалентная механической мощности 1 Вт
Реактивная мощность электрической цепи	$Q$	вар	вар	$var$	Мощность электрической цепи с синусоидальным переменным током при $\sin\phi=1$ и действующих значениях напряжения 1 В и силы тока 1 А
Полная мощность электрической цепи	$S$	Вольт - Ампер	$V \cdot A$	$V \cdot A$	Мощность электрической с действующими значениями напряжения 1 В и силы тока 1 А
Абсолютная магнитная проницаемость, магнитная постоянная	$\mu$	Генри на метр	Гн/м	$H/m$	Абсолютная магнитная проницаемость среды, в которой при напряжении магнитного поля 1 А/м создается магнитная индукция 1 Гн
Напряженность магнитного поля	$H$	Ампер на метр	А/м	$A/m$	Напряженность магнитного поля в центре длинного соленоида с $n$ витками на каждый метр длины, по которой проходит ток силой $A/n$

Таблица П2

**ВЫРАЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЕДЕНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ  
ДРУГИХ СИСТЕМ ЧЕРЕЗ ЕДЕНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ СИСТЕМЫ СИ**

Величина	Единица измерения		Значение в единицах СИ
	наименование	обозначение	
Сила	Килограмм-сила стен	сн	10 Н
Давление и механическое напряжение	Техническая атмосфера	ат	98066,5 Па
	Килограмм-сила на квадратный сантиметр	кгс/см <sup>2</sup>	98066,5 Па
	Физическая атмосфера	атм	101325 Па
	Миллиметр водяного столба	мм вод. ст.	9,80665 Па
	Миллиметр ртутного столба	мм рт. ст.	132,322 Па
Работа и энергия	Килограмм-сила-метр	кгс · м	9,80665 Дж
	Киловатт-час	кВт · ч	
Мощность	Лошадиная сила	л.с.	735,499 Вт
	Килограмм-сила-метр в секунду	кгс · м/с	9,80665 Вт
Количество электричества	Ампер-час	А · ч	3,6 · 10 <sup>-7</sup> Дж
			3,6 · 10 <sup>3</sup> Кл
Электрическая емкость	Фарад	Ф	1,11265 · 10 <sup>-12</sup> Ф
Магнитный поток	Максвелл	Мкс	10 <sup>-8</sup> Вб
Магнитная индукция	Гаусс, Тесла	Гс	10 <sup>-4</sup> Тл
Напряженность	Эрстед	Э	79,5775 А/м

Таблица П3

**ПРИСТАВКИ И МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ  
ДЕСЯТИЧНЫХ КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДЕНИЦ**

Приставка	Обозначение		Множитель, на который умножаются единицы системы СИ
	русское	международное	
Мега	М	М	10 <sup>6</sup>
Кило	к	k	10 <sup>3</sup>
Гекто	г	h	10 <sup>2</sup>
Дека	да	da	10
Деци	д	d	10 <sup>-1</sup>
Санти	с	c	10 <sup>-2</sup>
Милли	м	m	10 <sup>-3</sup>
Микро	мк	μ	10 <sup>-6</sup>
Нано	н	n	10 <sup>-9</sup>
Пико	п	p	10 <sup>-12</sup>

**ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ****ЕДИНИЦЫ ДЛИНЫ**

1 дюйм = 25,4 мм

1 фут = 0,3048 м

1 ярд = 0,9144 м

1 миля = 1,63932 км

1 мм = 0,0394 дюйма

1 см = 0,0328 фута

1 м = 1,0936 ярда

1 км = 0,6214 мили

**ЕДИНИЦЫ ПЛОЩАДИ**

1 дюйм<sup>2</sup> = 645,16 мм<sup>2</sup>

1 ярд<sup>2</sup> = 0,8361 м<sup>2</sup>

1 акр = 4046,86 м<sup>2</sup>

1 миля<sup>2</sup> = 2,59 км<sup>2</sup>

1 см<sup>2</sup> = 0,155 кв.дюйма

1 м<sup>2</sup> = 1,196 кв.ярда

1 га = 2,471 акра

1 км<sup>2</sup> = 0,386 кв.мили

**ЕДИНИЦЫ МАССЫ**

1 карат = 200 мг

1 унция = 28,35 гр

1 фунт = 0,4536 кг

1 гр = 0,0353 унции

1 кг = 2,2046 фунта

1 цт = 220 фунта

**ЕДИНИЦЫ ОБЪЕМА**

1 куб.дюйм = 16,387 см<sup>3</sup>

1 куб.фут = 0,0283 м<sup>3</sup>

1 куб.ярд = 0,7646 м<sup>3</sup>

1 см<sup>3</sup> = 0,061 куб.дюйм

1 дм<sup>3</sup> = 61,023 куб.дюйм

1 м<sup>3</sup> = 1,308 куб.ярда

## Приложение П5

**ПОСТОЯННЫЕ:**

1. Масса электрона -  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг

2. Масса протона -  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг

3. Заряд электрона -  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

4. Электрическая постоянная -  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

5. Коэффициент пропорциональности -  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$

6. Число Фарадея -  $F = 96500 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$

7. Магнитная постоянная -  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$

## *Используемая литература*

1. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – 12-е изд., стер. -М.; Издательский центр «Академия», 2006.-560 с.
2. Трофимова Т.И. Физика. Справочник с примерами решения задач. М.: Высшее образование, 2008. – 448с.
3. Погоньшев В.А. Физика для студентов агроинженерных специальностей сельскохозяйственных вузов. Учебное пособие, Брянск, изд. БГСХА, 2001. - 445с.
4. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: практическое пособие. – СПб,: Корона принт, 2003. – 336с.
5. Горбунов А.Н. Теоретические основы электротехники: /М.; 1998. – 491с.
6. Сборник формул по физике.- М.: АСТ: Астрель, 2008. – 222с.
7. Сборник основных формул по электродинамике / авт. – сост. Маринсон Л.К., Смирнов Е.В. – М.: АСТ: Астрель, 2008. – 190с.
8. Нефедова Н.В. Карманный справочник по электротехнике и электронике. – Изд. 2-е. – Ростов Н/Д : Феникс. 2007.-283с.
9. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Гарднрики, 2001юж.. – 317 с.
10. Электротехника и электроника. Учебное пособие для вузов / В.В. Кононенко и др. под ред. В.В. Кононенко. 3-е исправленное и дополненное. – Ростов Н/Д: Феникс, 2007, - 784с.
11. Кисаримов Р.А. Справочник электрика. - М.: ИП РадиоСофт, 2007. – 320с.
12. ЕГЭ – 2007. Физика. Репетитор / В.А. Грибов, Н.К. Ханнинов. – М.: Просвещение. Эксмо. 2007. – 432с.
13. Прыгов Н.М. Практикум по электротехнике. Методическое пособие по электротехнике. – Брянск; БГУ, 2004 – 74с.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие.....	3
ГЛАВА 1. Электротехническое поле.....	4
1.1. Основные определения, формулы и уравнения.....	4
1.1.1. Напряженность электрического поля. Закон Кулона.....	4
1.1.2. Электрическое напряжение и потенциал.....	6
1.1.3. Электрическая емкость конденсатора.....	7
1.2. Типовые задачи с решениями.....	10
1.3. Задачи для самостоятельного решения.....	14
1.4. Краткие выводы первой главы.....	15
ГЛАВА 2. Магнитное поле.....	17
2.1. Магнитное взаимодействие. Магнитная индукция.....	17
2.2. Линии магнитной индуктивности (силовые линии). Силы Лоренца и Ампера.....	18
2.3. Магнитный поток.....	20
2.4. Электромагнитная индукция.....	20
2.5. Индуктивность. Самоиндукция. Взаимная индукция.....	21
2.6. Краткие выводы второй главы.....	22
ГЛАВА 3. Линейные электрические цепи постоянного тока.....	24
3.1. Основные формулы и уравнения.....	24
3.2. Типовые задачи с решениями.....	27
3.3. Задачи для самостоятельного решения.....	44
3.4. Краткие выводы третьей главы.....	48
ГЛАВА 4. Электрические цепи однофазного синусоидального тока.....	51
4.1. Основные понятия, формулы и уравнения.....	51
4.2. Представление синусоидальных величин.....	53
4.3. Пассивные элементы синусоидального тока.....	61
4.3.1. Резистор $R$ в цепи синусоидального тока.....	61
4.3.2. Катушка индуктивности $L$ в цепи синусоидального тока.....	62
4.3.3. Конденсатор емкостью $C$ в цепи синусоидального тока.....	64
4.3.4. Цепь синусоидального тока с последовательным соединением $R, L$ и $C$ .....	65
4.4. Мощность в цепи синусоидального тока.....	71
4.4.1. Мгновенная мощность.....	71
4.4.2. Активная мощность.....	71
4.4.3. Реактивная мощность.....	72
4.4.4. Полная мощность.....	72
4.4.5. Комплексная мощность.....	72
4.4.6. Баланс мощностей в цепи синусоидального тока.....	73
4.5. Условия передачи максимальной активной мощности в нагрузку.....	74
4.6. Типовые задачи с решениями.....	75
4.7. Задачи для самостоятельного решения.....	84
4.8. Краткие выводы четвертой главы.....	85

ГЛАВА 5. Цепи с взаимной индуктивностью.....	88
5.1. Индуктивная связь. Степень и коэффициент связи.....	88
5.2. ЭДС взаимной индукции.....	90
5.3. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек.....	91
5.4. Пример расчета сложной цепи.....	93
5.5. Краткие выводы пятой главы.....	94
ГЛАВА 6. Четырехполюсники (ЧП).....	95
6.1. Основные уравнения ЧП.....	95
6.2. T-образная схема замещения ЧП.....	96
6.3. П-образная схема замещения ЧП.....	97
6.4. Опытное определение коэффициентов четырехполюсника.....	98
6.5. Типовые задачи с решениями.....	100
6.6. Краткие выводы шестой главы.....	101
Приложения.....	103
Используемая литература.....	108
Содержание.....	109

Лариса Михайловна Маркарянц  
Николай Михайлович Прыгов  
Дмитрий Владимирович Кирдищев

**Практикум**  
**по теоретическим основам электротехники**  
**Часть I**

Методическое пособие  
к решению задач по теоретическим основам электротехники  
и по выполнению самостоятельной работы студентов специальности  
«Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»

Редактор Осипова Е.Н.

---

Подписано к печати 31.01.2011 г. Формат 60×80  $\frac{1}{16}$   
Бумага печатная. Усл. п. л. 6,39. Тираж 100 экз. Изд. №1881.

---

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии  
243325 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, БГСХА